УДК 530.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОМ КОНИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Т.Р.Аманбаев, Р.Е.Нысанов
ЮКГУ им. М.Ауезова, г.Шымкент

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается с помощью системы уравнений, состоящей из уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности [1]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -grad p + \mu\Delta\mathbf{v} \tag{1}$$
$$div\mathbf{v} = 0$$

Здесь ρ, p, $\mathbf{v}$ – плотность, давление и вектор скорости среды; μ-коэффициент динамической вязкости жидкости. В данной работе рассмотрено стационарное (не зависящее от времени) течение внутри конуса, из вершины которого происходит истечение жидкости (в вершине конуса находится источник). Выбираем сферическую систему координат с центром в вершине конуса. Ось z направим по оси симметрии конуса. Рассмотрим случай, когда движение жидкости будет чисто радиальным и осесимметричным, т.е. $v_\theta = v_\varphi = 0$, $v_r = v(r,\theta)$. Пусть на бесконечности скорость равна нулю. Будем рассматривать движение жидкости в достаточном удалении от источника, когда скорость среды мала. Тогда нелинейным членом в (1) можно пренебречь. Таким образом, далее рассматривается так называемое ползущее течение внутри конуса (течение вдали от вершины конуса). На оси конуса ставится условие симметрии, а на его стенке – условие прилипания.

В рамках принятых допущений из системы (1) можно получить уравнение

$$W'' + \alpha_1 \operatorname{ctg}(\alpha_1\overline{\theta})W' + 6\alpha_1^2 W = 0, \tag{2}$$

$$\overline{\theta} = \theta/\alpha_1, \; W = w/(C/6), \;\; w = u + C/6, \;\; u(\theta) = \eta r^2 v, \;\; \alpha_1 = \alpha/2$$

с краевыми условиями

$$W'(0) = 0, \; W(1) = 1. \tag{3}$$

Здесь α – угол раствора конуса; θ – полярный угол; C – постоянная. Уравнение (2) будем решать с помощью рядов. Применяя стандартную процедуру метода рядов [2], получим следующее решение для W (с учетом краевых условий (3)):

$$W = \frac{1 - \frac{3}{8}(\alpha\overline{\theta})^2 + \frac{1}{32}(\alpha\overline{\theta})^4 - ....}{1 - \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha^4 - ....} \tag{4}$$

Оставляя в (4) первые два слагаемые ряда (что соответствует малому углу раствора конуса), получим следующее решение для v (постоянная C определяется из условия того, что за 1 сек через любое сечение конуса протекает одинаковое количество жидкости Q):

$$v = \frac{3}{4}\frac{Q}{\pi\rho\alpha}\frac{1}{r^2}\left(1 - \overline{\theta}^2\right), \quad \overline{\theta} = \frac{\theta}{\alpha/2} \tag{5}$$

Учет третьего слагаемого ряда (4) приводит к решению:

$$v = \frac{3}{4}\frac{Q}{\pi\rho\alpha(1 - 0.1\alpha^2)}\frac{1}{r^2}\left[\left(1 - \overline{\theta}^2\right) - \frac{1}{12}\alpha^2\left(1 - \overline{\theta}^4\right)\right], \quad (0 \le \overline{\theta} \le 1)$$

Заметим, что при достаточно малых углах раствора конуса $\alpha_1 = \alpha/2 << 1$, когда $\operatorname{ctg}\alpha_1\overline{\theta} \cong 1/\alpha_1\overline{\theta}$, приближенное решение задачи (2), (3) можно выразить через функцию Бесселя первого рода. Имеем:

$$W(\overline{\theta}) = \frac{J_0(\gamma\overline{\theta})}{J_0(\gamma)}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha \tag{6}$$

Система уравнений (1) после нахождения распределения скорости позволяет найти распределение давления внутри конуса:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{3r^3}\left[6u - C\right] + const$$

На основе полученных выражений для p и v можно рассчитать силу, приходящуюся на единицу площади поверхности конуса на расстоянии r от вершины конуса. Сила **F**, действующая на единицу площади поверхности, равна [3]

$$F_i = -p_{ik}n_k = pn_i - \tau_{ik}n_k$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй представляет собой действующую на поверхность силу трения, обусловленную вязкостью (n_k - компоненты единичного вектора нормали, внешней по отношению к поверхности жидкости; τ_{ik} - компоненты тензора вязких напряжений). Определяя из этой формулы компоненты (по нормали и по касательной к поверхности) силы, и проецируя их на ось симметрии конуса, найдем:

$$F = -p\cos\theta + \tau_{rr}\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta$$

Подставив выражение (5) в формулы (закон Навье-Стокса):

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

получим, что на поверхности конуса

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{3\mu Q}{\pi\rho\alpha^2}\cdot\frac{1}{r^3}$$

а давление

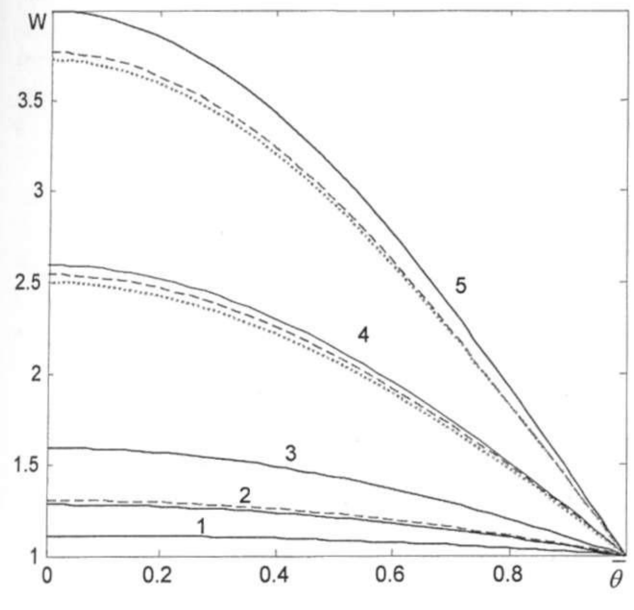
$$p = p_0 - \frac{\mu Q}{2\pi\rho\alpha}\left(\frac{8}{\alpha^2} - 3\right)\cdot\frac{1}{r^3}$$

Таким образом, имеем:

$$F = \left\{\left[-p_0 + \frac{\nu Q}{2\pi\alpha}\left(\frac{8}{\alpha^2} - 3\right)\right]\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{3\nu Q}{\pi\alpha^2}\cos\frac{\alpha}{2}\right\}\cdot\frac{1}{r^3}, \quad (\nu = \frac{\mu}{\rho})$$

При достаточно малых α (когда $\alpha^3 << 1$), отсюда

$$F \cong \left[-\frac{\alpha p_0}{2} + \left(\frac{29}{24} + \frac{\alpha^2}{32} + \frac{5}{\alpha^2}\right)\frac{\nu Q}{\pi}\right]\cdot\frac{1}{r^3}$$



На рисунке представлены графики приближенно аналитического и численного решений задачи для W при разных углах раствора конуса: кривые 1 соответствуют углу $\alpha=\pi/6$; 2 - $\alpha=\pi/4$; 3 - $\alpha=\pi/3$; 4 - $\alpha=4\pi/9$; 5 - $\alpha=\pi/2$. Сплошные линии – численное решение, полученное методом суперпозиции [2], штриховые – приближенное решение (4) (с двумя членами ряда для кривых 1,2 и с тремя членами ряда для кривых 3-5), пунктирные линии – решение, вычисленное по формуле (6). Из рисунка видно, что численное и приближенно аналитические решения хорошо согласуются между собой. Причем в случаях $\alpha=\pi/6$ (кривая 1) и $\alpha=\pi/3$ (кривая 3) численные и приближенные решения практически полностью совпадают. Заметное отличие между ними наблюдается, начиная со значения угла раствора конуса $\alpha=4\pi/9$.

Литература

1 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1984.
2 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1988.
3 Краткий физико-технический справочник. -М.: Физматгиз, 1960.

Қорытынды

Конус ішіндегі сығылмайтын тұтқыр сұйықтың қозғалысы зерттелген. Есептің сандық және жуық шешімдері табылған. Олардың өзара жақын болатындығы көрсетілген.

Summary

The motion of viscous liquid flow in the konus was investigated. The numerical and approximate solutions were obtained. These solutions are likely between themselves.