УДК 621.721: 624.074

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОСТОМ И АФФИННОМ СООТВЕТСТВИИ МОДЕЛИ И НАТУРНОГО ОБЪЕКТА

А.И.Айнабеков, А.Б.Молдагалиев, Т.Т.Серикбаев
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

В связи с непрерывным ростом теплонапряженности различных конструкций методы физического моделирования температурных полей и термомеханических явлений в силовых элементах конструкций находят широкое применение при проведении экспериментальных работ.

Классическая теория подобия в сочетании с практикой моделирования представляет собой фундаментальный метод экспериментального исследования механических процессов и явлений. Этот метод, основанный на анализе размерностей физических величин, особенно эффективен при решении задач, которые не имеют строгой постановки [1,2].

В качестве примера особенностей обработки экспериментальных данных с привлечением методов подобия и размерностей рассмотрим задачу моделирования термомеханического подобия оболочки.

Пусть температуры геометрически подобных образцов 1 и 2 заданы и в сходственных точках конструкций удовлетворяются условия подобия температурных полей модели и натуры. Масштаб температур может быть представлен в виде отношения характерных температур обоих тел $T_0 = \dfrac{T_1}{T_2}$.

Температурное поле в упругом теле вызывает локальное изменение его объема и при неравномерном нагреве приводит к возникновению тепловых напряжений. Объемное расширение материала и термоупругие напряжения зависят от коэффициента линейного расширения α и пропорциональны температуре $T\left(x, y, z, \tau\right)$.

Рассматривая статическую задачу термоупргости, выпишем основные параметры данного физического явления:

$$\sigma, \varepsilon, u, \underline{l, p, \alpha, \mu, E, T} \tag{1}$$

и составим матрицу размерностей основных параметров, имеющих ненулевую размерность:

$$\begin{array}{c} \\ \\ L \\ F \\ K \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \sigma & u & p & \alpha & E & l & T \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \end{array}, \tag{2}$$

где L, F, K - основные единицы измерения длины, силы и абсолютной температуры; σ, ε, u – характерные величины напряжений, деформаций и перемещений, под которыми следует понимать любые из компонентов напряжений σ_{ij}, деформаций ε_{ij} и перемещений u_i; p – погонная нагрузка, E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Ранг матрицы размерностей $r = 3$, количество основных параметров $n = 7$. Согласно Π – теореме анализа размерностей, количество независимых безразмерных комплексов $\Pi_к$, составленных из основных параметров, должно быть равно $к = n - r = 7 - 3 = 4$, помимо безразмерных физических величин $\Pi_5 = \varepsilon$; $\Pi_6 = \mu$.

Согласно Π – теореме анализа размерностей, общее выражение для неизвестного безразмерного отношения представим в форме:

$$\Pi = \sigma^{x_1} \cdot u^{x_2} \cdot p^{x_3} \cdot \alpha^{x_4} \cdot E^{x_5} \cdot l^{x_6} \cdot T^{x_7} . \qquad (3)$$

Пользуясь матрицей размерностей (2) и формулой размерностей $\dim F = L_1^{a_1} \cdot L_2^{a_2} \cdot ....L_n^{a_n}$, где L_i $(i = 1,2....n)$ основные единицы измерения, a_i – некоторые показатели степени, подсчитаем размерность произведения:

$$\dim \Pi = \left(L^{-2} \cdot G^1\right)^{x_1} \cdot \left(L^1\right)^{x_2} \cdot \left(L^{-1} \cdot G^1\right)^{x_3} \cdot \left(K^1\right)^{x_4} \cdot \left(L^{-2} \cdot G^1\right)^{x_5} \cdot \left(L^1\right)^{x_6} \cdot \left(K^1\right)^{x_7} . \qquad (4)$$

Используя свойства показательных функций из (4), найдем:

$$\dim \Pi = G^{(x_1 + x_3 + x_5)} \cdot L^{(-2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 + x_6)} \cdot K^{(-x_4 + x_7)} \qquad (5)$$

Условие безразмерности произведения Π приводит к системе алгебраических уравнений для неизвестных показателей x_j:

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ -x_4 + x_7 = 0 \end{gathered} \qquad (6)$$

Линейная однородная система (6) является неопределенной, так как число неизвестных ($j=7$) превышает количество уравнений ($j=3$). Считая значения x_1, x_2, x_3, x_4 произвольными и выражая через них показатели степени x_5, x_6 и x_7, найдем:

$$\begin{gathered} x_5 = -x_1 - x_3 \\ x_6 = 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 \\ x_7 = x_4 \end{gathered} \qquad (7)$$

Для величин x_1, …, x_4 могут быть назначены любые значения. Пользуясь этим произволом, выберем для первого решения Π_1:

$$x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Остальные показатели вычисляем с помощью уравнений (7):

$$x_5 = -1,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0 .$$

Подставляя найденные значения x_j в выражение (3), получим:

$$\Pi_1 = \sigma \cdot E^{-1}$$

Остальные безразмерные отношения $\Pi_к$ $(к = 2 \ldots 4)$ получим, полагая в уравнениях (7) последовательно для каждого значения $к = 2..4$

$$x_j = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$$

и вычисляя показатели x_j при $j = 5,6,7$.

Результаты вычисления представим в виде следующей матрицы решений:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \sigma & u & p & \alpha & E & l & T \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}. \tag{8}$$

Используя матрицу решений (8), представим безразмерные отношения в форме:

$$\Pi_1 = \frac{\sigma}{E}, \quad \Pi_2 = \frac{u}{l}, \quad \Pi_3 = \frac{p}{E}, \quad \Pi_4 = \alpha T. \tag{9}$$

Таким образом, матрице решений соответствуют четыре независимых безразмерных комплекса основных параметров.

Количество безразмерных отношений (9) удовлетворяет Π – теореме, так как число основных параметров в матрице размерностей (2) $n = 7$, ранг матрицы размерностей $r = 3$ и $k = n - r = 4$.

Дополняя список (9) безразмерными параметрами $\Pi_5 = \varepsilon$, $\Pi_6 = \mu$, примем в качестве искомых критериев подобия модифицированную фундаментальную систему безразмерных комбинаций:

$$\begin{gathered} \Pi_1 = \frac{\sigma}{E} = idem, \quad \Pi_2 = \frac{u}{l} = idem, \quad \Pi_3 = \frac{p}{E} = idem, \Pi_4 = \frac{l}{\delta} = idem, \\ \Pi_4 = \alpha T = idem, \quad \Pi_5 = \varepsilon = idem, \quad \Pi_6 = \mu = idem. \end{gathered} \tag{10}$$

где символ $idem$ означает, что соответствующее безразмерное отношение для класса подобных явлений должно оставаться неизменным.

В соответствии с найденными критериями подобия составим критериальные уравнения термоупругости:

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma}{E} = \psi_1\left(\alpha T, pE^{-1}, \mu\right), \\ &\varepsilon = \psi_2\left(\alpha T, pE^{-1}, \mu\right), \\ &\frac{u}{l} = \psi_3\left(\alpha T, pE^{-1}, \mu\right). \end{aligned} \tag{11}$$

На основе критериев подобия могут сформулированы условия моделирования термомеханических явлений в виде правил пересчета параметров модели и натуры:

$$\frac{\sigma_H}{E_H} = \frac{\sigma_M}{E_M}, \quad \alpha_м T_м = \alpha_н T_н, \quad \frac{p_м}{E_м} = \frac{p_н}{E_н}, \quad \mu_м = \mu_н, \quad \frac{u_H}{l_H} = \frac{u_M}{l_M}, \quad \frac{l_H}{\delta_H} = \frac{l_M}{\delta_M}, \tag{12}$$

где индекс "$н$" - для натурного объекта, "$м$"- для модели.

Если характеристики модели выбраны, исходя из равенств определяющих критериев подобия (12), то для определения тепловых напряжений и смещений натурной конструкции будут иметь место формулы:

$$\sigma_н = \sigma_м \frac{E_н}{E_м}, \quad \varepsilon_н = \varepsilon_м, \quad u_н = u_м \frac{l_н}{l_м}. \tag{13}$$

Если принять материал модели и натуры одинаковым, т.е. $\frac{E_н}{E_м} = 1$ и $m = \frac{l_M}{l_H}$, будем иметь: $\sigma_н = \sigma_м, \quad u_H = u_M \cdot m_l$.

Равенства (13) регламентируют выбор материала модели и температур проведения эксперимента, потребных для существования термомеханического подобия.

Практическое применение моделирования на основе классического метода при экспериментальных исследованиях тонких цилиндрических оболочек из-за технологических ограничений в масштабах толщин ограничено. В этих случаях приходится отступать от полного геометрического подобия и вводить два или несколько линейных масштабов. При этом геометрическое подобие моделей заменяется аффинным (от латинского affinus -родственный) подобием модели и натуры. Указанный метод позволяет в ряде случаев отказаться от полного геометрического подобия и путем сокращения количества необходимых критериев подобия ослабить ограничения на условия моделирования, отвечающие классической теории подобия [2,3].

Рассмотрим возможность аффинного моделирования термомеханического подобия цилиндрической оболочки с использованием аффинно-подобных моделей.

Дополнив список основных параметров (1), толщиной оболочки δ, будем иметь следующий список параметров.

$$\sigma, \varepsilon, u, \underline{p, \alpha, \mathrm{E}, l, \delta, T, \mu} \tag{14}$$

Матрица размерностей основных параметров, имеющих ненулевую размерность, будет иметь вид:

$$\begin{array}{c} \\ F \\ L_l \\ L_\delta \\ K \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \sigma & u & p & \alpha & E & l & \delta & T \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}, \tag{15}$$

где L_ℓ, L_δ, - основные единицы измерения линейных размеров и толщины.

В результате вычисления по методике, описанной выше, получена следующая матрица решений:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \sigma & u & p & \alpha & E & l & \delta & T \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \tag{16}$$

Из матрицы решений (16) имеем следующие безразмерные отношения:

$$\Pi_1 = \frac{\sigma \cdot l^2}{E \cdot \delta^2}, \quad \Pi_2 = \frac{u}{\delta}, \quad \Pi_3 = \frac{P \cdot l^4}{E \cdot \delta^4}, \quad \Pi_4 = \alpha T. \tag{17}$$

Количество безразмерных отношений (17) удовлетворяет Π – теореме, так как число основных параметров в матрице размерностей (15) $n = 8$, ранг матрицы размерностей $r = 4$ и $k = n - r = 4$.

В качестве искомых критериев подобия будем иметь следующую модифицированную фундаментальную систему безразмерных комбинаций:

$$\Pi_1 = \frac{\sigma \cdot l^2}{E \cdot \delta^2} = idem, \quad \Pi_2 = \frac{u}{\delta} = idem, \quad \Pi_3 = \frac{P \cdot l^4}{E \cdot \delta^4} = idem, \Pi_4 = \frac{l}{\delta} = idem,$$
$$\Pi_4 = \alpha \cdot T = idem, \quad \Pi_5 = \varepsilon = idem, \quad \Pi_6 = \mu = idem. \tag{18}$$

Условия моделирования термомеханических явлений в цилиндрических оболочках получены в виде:

$$\alpha_м T_м = \alpha_н T_н\,, \quad \frac{p_M \cdot l_M^4}{E_M \cdot \delta_M^4} = \frac{p_H \cdot l_H^2}{E_H \cdot \delta_H^4}\,, \quad \mu_м = \mu_н\,, \quad \frac{l_M}{\delta_M} = \frac{l_H}{\delta_H} \tag{19}$$

Если принять материал модели и натурного объекта одинаковым, т.е. $\frac{E_H}{E_M} = 1$ и установить масштабы моделирования линейных размеров $m_l \frac{l_M}{L_M}, m_\delta = \frac{\delta_M}{\delta_H},$ то окончательно имеем:

$$\sigma_H = \sigma_M \frac{m_l^2}{m_\delta^2}; \;\; u_H = \frac{u_M}{m_\delta} \quad . \tag{20}$$

Равенства (19) регламентируют выбор материала модели и температур проведения эксперимента, потребных для существования термомеханического аффинного подобия.

Сравнение условий подобия (13) с критериями подобия (20) для задач термомеханики цилиндрических оболочек обнаруживает их формальные несовпадения. Однако нетрудно заметить, что в обоих случаях формулы пересчета с модели на натуру для напряжений и перемещений, устанавливающие соответствие с внешними нагрузками, будут одинаковыми. Результат не случаен, так как сохраняется линейная зависимость соответственных критериев подобия с общим коэффициентом пропорциональности, равном r/δ.

Установленные зависимости между критериями подобия (13) и (20) могут использоваться не только при экспериментальных исследованиях термомеханики тонкостенных оболочек, но и для представления теоретических решений в наиболее общей и содержательной форме.

Литература

1 Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике.- М.: Наука, 1981.- 447 с.

2 Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкции. – М.: Машиностроение, 1990. -288 с.

3 Клечко С.Д. Аффинное подобие в теории неоднородных анизотропных упругих, упругопластических и упруговязких пластин и оболочек //Труды Новосибирского института инж. ж-д. транспорта. Механика деформируемого тела и расчет сооружений. Вып. 96.- Новосибирск, 1970.- 63-76 с.

Қорытынды

Мақалада нақты объектіге белгілі бір масштабта орындалған үлгінің аффиндік және қарапайым термомеханикалық ұқсастық критерин белгілеу қарастырылған. Жылу кернеулері және орын аустыруларДың ұқсастық критерилері анықталған.

Summary

In work the questions of modeling термо of mechanical similarity of an environment are considered at simple conformity to model and nature of object. The conditions of modeling warmly of the mechanical phenomena as rules of recalculation of parameters of model and nature are formulated. The criteria of similarity for definition of thermal pressure and displacement executed in certain scale to a nature are established.