

УДК 519.67

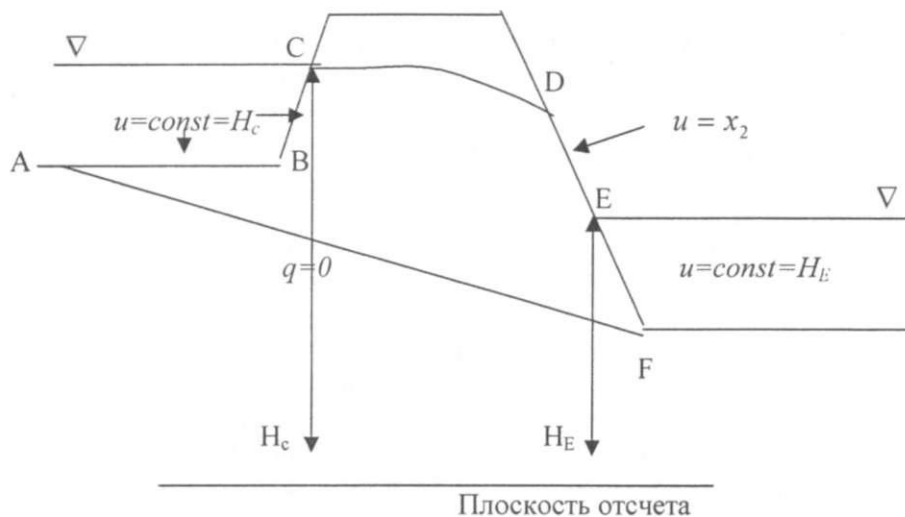
**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ  
ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ДАМБУ С ВОДОНЕПРОНИЦАЕМЫМ ЗАКЛАДНЫМ  
ЭЛЕМЕНТОМ В СЛУЧАЕ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ**

А.Т.Калбаева, С.Д.Куракбаева, А.М.Бренер  
ЮКГУ им. М.Ауезова, г.Шымкент

Проблемы фильтрации воды из открытых водоемов в грунт через насыпные дамбы являются весьма важными с точки зрения расчета надежности дамб и сооружений, находящихся в теле дамбы или в непосредственной близости от них. Эти задачи также имеют принципиальное значение при проведении расчетов распространения отходов химических предприятий в грунтовых водах.

В настоящей статье приведено численное решение задачи фильтрации жидкости из открытого водоема через дамбу, учитывающее наличие в теле дамбы водонепроницаемых закладных элементов. Для этой цели была использована схема метода граничных элементов, ко-

торый продемонстрировал большие возможности при решении задач со свободными поверхностями [1,2].



ABC:  $u=H_c$ , CD:  $u=x_2, q=0$ , DE:  $u=x_2$ , EF:  $u=H_E$ , AF:  $q=0$

Рисунок 1 - Граничные условия в задаче о течении воды со свободной поверхностью

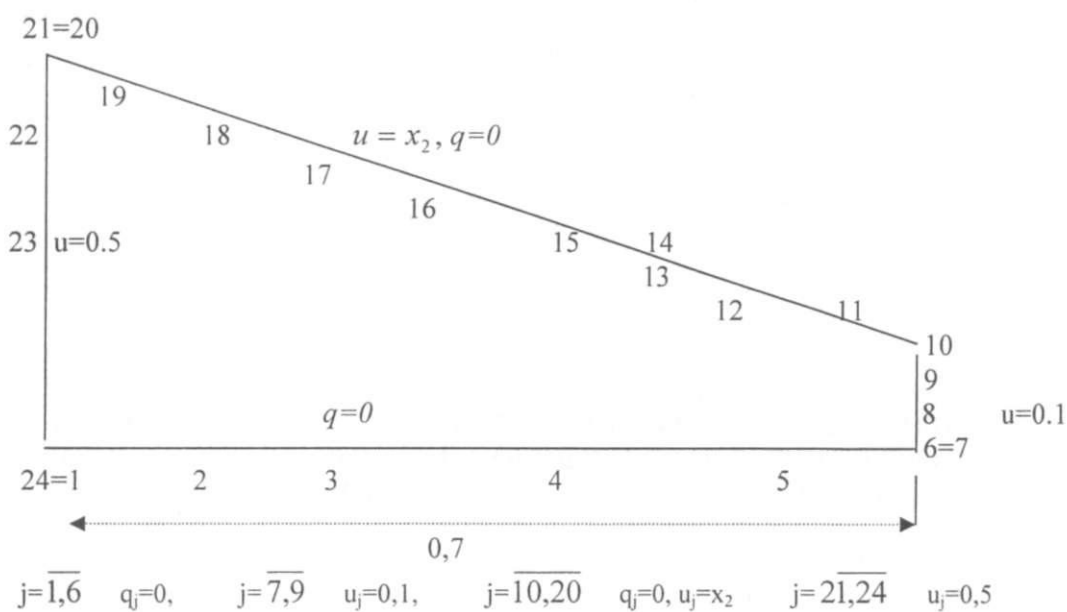


Рисунок 2 - Схема расположения граничных элементов для грунтового блока при течении со свободной поверхностью

Рассмотрим в начале случай однородной и изотропной среды. Тогда задача сводится к уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  относительно потенциала скорости  $u$  с граничными условиями:  $q=0$  на непроницаемой границе (т.к. дно твердое, то  $\left(\vec{u} \cdot \vec{n}\right)=0$ ), т.е. на поверхности слоя грунта и

породы (поверхность AF на рисунке 1),  $u=const$  на поверхностях ABC и EF пористой среды,  $u = x_2$  на фильтрующей поверхности DE, где вода проходит сквозь грунт и стекает вниз,  $u = x_2$  и  $q=0$  на свободной поверхности. Это типичная задача со свободными границами, т.к. заранее не известно точное положение свободной поверхности, и определение его представляет собой часть процесса решения задачи.

При численном расчете этой задачи начальное положение свободной поверхности задается произвольным образом, и, кроме того, во всех точках этой поверхности принимается условие  $q=0$ . Найденное для каждой узловой точки свободной поверхности значение потенциала сравнивается с высотой водной поверхности. Если разность между ними больше, чем максимальная допустимая погрешность, эта разность алгебраически суммируется с высотой поверхности в соответствующей узловой точке и проводится новая итерация.

На рисунке 2 показана схема разбиения на граничные элементы в задаче о течении со свободной поверхностью через блок из пористого материала. Высоты верхнего и нижнего бьефов составляют соответственно 0,5 и 0,1 относительно поверхности отсчета.

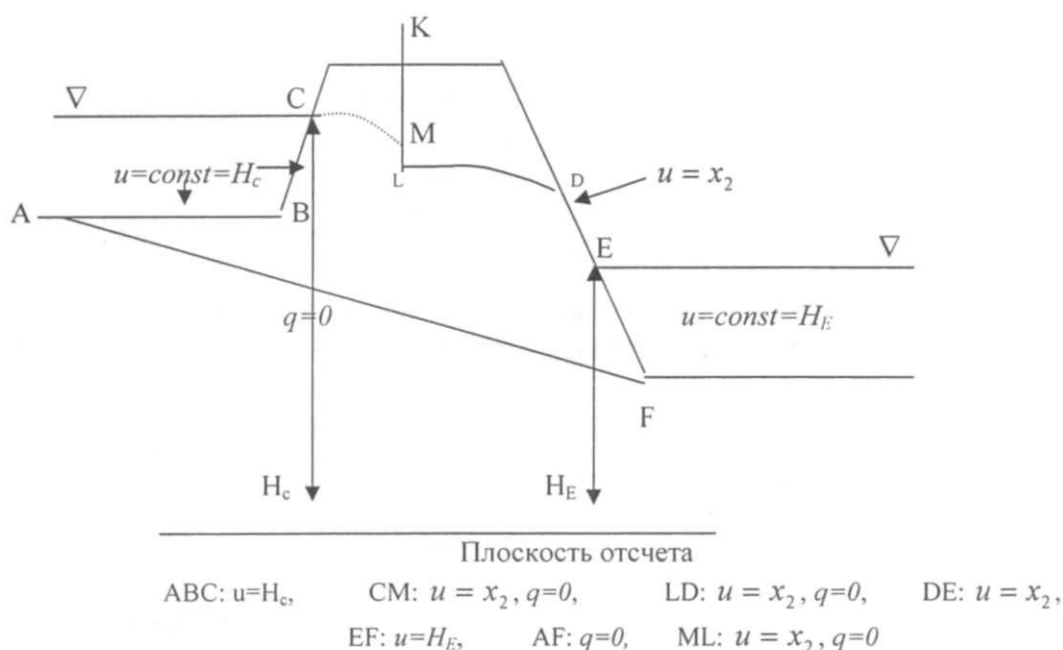


Рисунок 3 - Граничные условия в задаче о течении воды со свободной поверхностью для закладного элемента

Граничные условия задачи имеют вид:  $u=0,5$  на поверхности, обращенной к потоку (узлы 21-24),  $q=0$  на нижней (непроницаемой) поверхности (узлы 1-6),  $u=0,1$  на поверхности, направленной к потоку (узлы 7-9), и  $q=0$  на свободной поверхности (узлы 10-20). На начальном этапе расчетов форма свободной поверхности была произвольно выбрана плоской и столь же произвольно было задано положение этой поверхности. Окончательное положение свободной поверхности получено после 7-ой итерации (рисунок 4).

В данной статье также рассмотрена задача фильтрации для одиночного закладного элемента в виде вертикальной пластины. В этом случае принимаем:  $q=0$  на непроницаемой границе (т.к. дно твердое, то  $\left( \frac{\vec{u}}{n} \right) = 0$ ), т.е. на поверхности слоя грунта и породы (поверхность AF на рисунке 3),  $u=const$  на поверхностях ABC и EF пористой среды,  $u = x_2$  на фильтрующей поверхности DE, где вода проходит сквозь грунт и стекает вниз,  $u = x_2$  и  $q=0$  на свободной поверхности CM и LD. KL- закладной элемент. Точное положение свободной поверхности заранее неизвестно, и определение его представляет собой часть процесса решения задачи.

Граничные условия задачи имеют вид:  $u=0,5$  на поверхности, обращенной к потоку,  $q=0$  на нижней (непроницаемой) поверхности,  $u=0,1$  на поверхности, направленной к потоку, и  $q=0$  на свободной поверхности. На начальном этапе расчетов форма свободной поверхности была произвольно выбрана плоской и столь же произвольно было задано положение этой поверхности. Окончательное положение свободной поверхности получено после 11-ой итерации (рисунок 4).

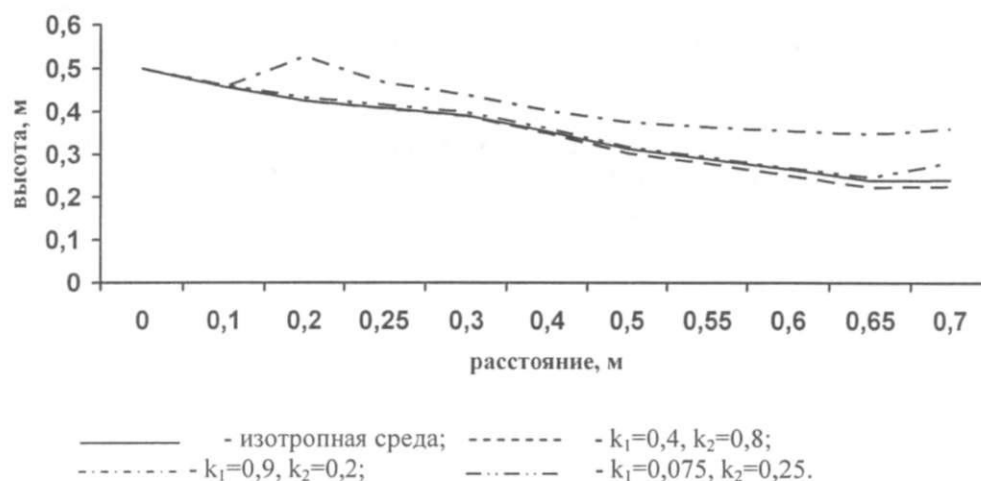


Рисунок 4 - Расчетные результаты для потенциала при течении со свободной поверхностью для изотропной и ортотропной среды

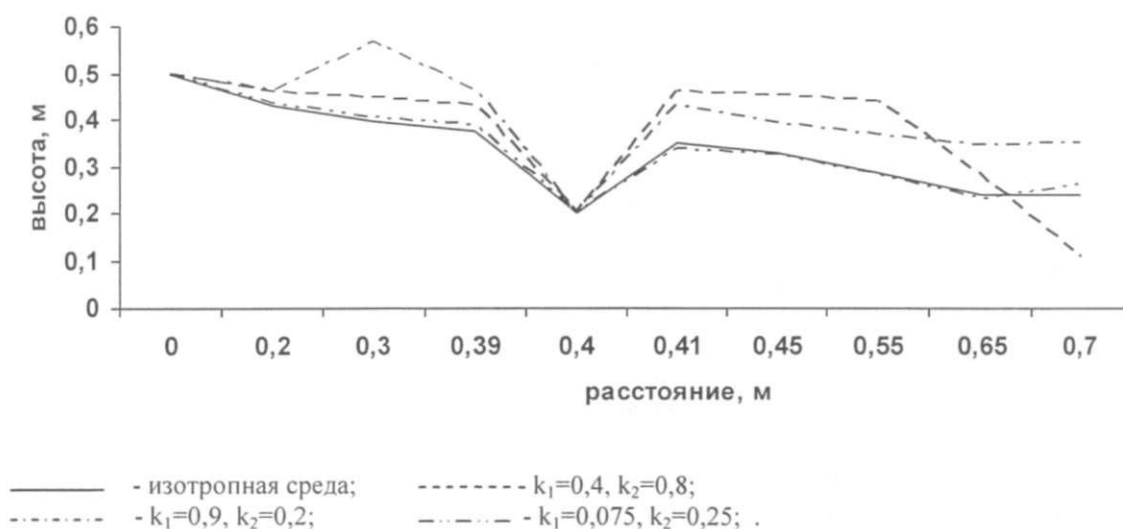


Рисунок 5 - Одиночный закладной элемент в виде вертикальной пластины для изотропной и ортотропной среды

Предположим теперь, что среда, применительно к которой рассматривается задача, является ортотропной, т.е. коэффициенты фильтрации зависят от направления течения в пористой среде. Такой случай является довольно распространенным в реальных условиях. Разрешающее уравнение в осях координат, связанных с направлением ортотропии, можно записать для двумерного случая в виде  $k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ , где  $k_i$  - характеристики среды в направлении

$i$ -й оси ортотропии. Фундаментальным решением этого уравнения является функция  $u^* = \frac{1}{(k_1 k_2)} \ln \frac{1}{r(\xi, x)}$ . Данную задачу решаем этим же методом. Результаты расчета задачи о

течении воды со свободной поверхностью и задачи с одиночным закладным элементом в виде вертикальной пластины применительно к ортотропной среде представлены на рисунках 4 и 5.

Проведенные расчеты демонстрируют замечательные возможности метода граничных элементов, который позволяет решать задачи фильтрации в средах сложной конфигурации с гораздо меньшей трудоемкостью, чем разностные методы. Кроме того, практически снимается весьма сложная в случае разностных методов проблема аппроксимации сложных граничных условий.

### Литература

- 1 К.Бреббия, Ж.Теллес, Л.Вроубел. Методы граничных элементов: пер.с англ. – М.: Мир, 1987. – 524с.
- 2 Connor J.J., and Brebbia C.A.. Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes Butterworths.-London. 1976.

### Қорытынды

Макалада ортотроптық материалдан жасалған дамба арқылы денесінде су өтпейтін ішкі элементтері бар ашық су қоймаларында сұйықты фильтрация жасау есебінің сандық шешімі келтірілген. Есепті шешу үшін шекті элементтер әдісі қолданылған. Бұл әдіс еркін кеңістіктегі есептерді шешу үшін үлкен мүмкіндіктерге ие. Жасалған есептеулер шекті элементтер әдісінің фильтрация есептерін күрделі конфигурациялы орталарда шекті айырымдар әдісіне карағанда жеңіл, аз уақытта шешуге болатындығын көрсетті.

### Summary

The paper deals with the numerical solution of the problem of water filtration from open basin through a dam from an orthotropic medium with watertight putting elements. For the problem solving the boundary elements method has been used. This method appears a high power applying to free boundary problems. As a result it can be concluded that the boundary elements method allows solving problems of filtration in media of complex shapes with lesser labour-intensity comparing with grids methods.