УДК 621.721: 624.074

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПОДОБНЫХ И АФФИННЫХ МОДЕЛЯХ

А.В.Протопопов, Т.Р.Аманбаев, Ш.Т.Ешимбетов
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Методы анализа размерностей во многих случаях позволяют на основании простых экспериментов выявить величины, существенные для данного процесса и установить связи между ними без использования математической постановки изучаемого процесса [1,2].

В качестве примера особенности обработки экспериментальных данных и установления критериев подобия с привлечением методов подобия и размерностей рассмотрим задачу моделирования корпуса ВЦР и при динамических воздействиях.

Для описания процесса колебаний резервуара выпишем основные параметры, описывающие его динамику в виде:

$$u,\omega,q,l,\delta,r,E,\mu,x,\varphi,\rho,t \tag{1}$$

где $u$ - прогиб, $\omega$ - частота колебаний, $q$ - интенсивность поверхностной нагрузки, $l,\delta,r$ - характерные линейные размеры, толщина стенки и радиус кривизны срединной поверхности; $E,\mu,\rho$ - модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала; $x,\varphi$ - линейное и угловое перемещение; $t$ - время.

Вперечне основных параметров (1) значения $x,\varphi$ и $t$ являются определяющими параметрами моделирования динамического поведения резервуаров при получении критериев подобия.

В качестве основных единиц измерения примем единицу массы М (кг), единицу линейных размеров L (м) и единицу времени Т (с).

Матрица размерностей физических величин (1) в системе СИ после исключения безразмерных величин (коэффициента Пуассона $\mu$ и углового перемещения $\varphi$ ) будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c|cccccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ & u & \omega & q & l & \delta & r & E & x & \rho & t \\ \hline M & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ L & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ T & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{2}$$

Ранг матрицы (2) равен $r$=3, количество основных параметров $n=10$. Согласно $\Pi$ - теореме анализа размерностей [2], количество независимых безразмерных комплексов $\Pi_k$, составленных из основных параметров, равно $k=n-r=10-3=7$ (помимо безразмерных величин $\Pi_8=\mu$, $\Pi_9=\varphi$).

Общее выражение для неизвестного безразмерного отношения представим в форме:

$$\Pi=u^{x_1}\cdot\omega^{x_2}\cdot q^{x_3}\cdot l^{x_4}\cdot\delta^{x_5}\cdot r^{x_6}\cdot E^{x_7}\cdot x^{x_8}\cdot\rho^{x_9}\cdot t^{x_{10}} \tag{3}$$

Пользуясь матрицей размерностей (2) и формулой размерностей

$\dim F = L_1^{a_1}\cdot L_2^{a_2}........L_n^{a_n}$ ($L_i(i=1,2...n)$ основные единицы измерения; $a_i$ - некоторые показатели степени), подсчитаем размерность произведения:

$$\dim \Pi = \left(L\right)^{x_1}\left(T^{-1}\right)^{x_2}\left(ML^{-1}T^{-2}\right)^{x_3}\left(L\right)^{x_4}\left(L\right)^{x_5}\left(L\right)^{x_6}\left(ML^{-1}T^{-2}\right)^{x_7}\left(L\right)^{x_8}\left(ML^{-3}\right)^{x_9}\left(T\right)^{x_{10}} \qquad (4)$$

Воспользуемся свойствами показательных функций, из (4) найдем:

$$\dim \Pi = M^{(x_3+x_7+x_9)} L^{(x_1-x_3+x_4+x_5+x_6-x_7+x_8-3x_9)} T^{(-x_2-2x_3-2x_7+x_{10})} \qquad (5)$$

Условие безразмерности произведения $\Pi$ приводит к системе алгебраических уравнений для неизвестных показателей $x_j$

$$\begin{aligned} &x_3 + x_7 + x_9 = 0 \\ &x_1 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - 3x_9 = 0 \\ &-x_2 - 2x_3 - 2x_7 + x_{10} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Линейная однородная система (6) является неопределенной, так как число неизвестных ($j=10$) превышает количество уравнений. Считая значения $x_1 \ldots x_7$ произвольными и выражая через них показатели $x_8$, $x_9$ и $x_{10}$, получим:

$$\begin{aligned} &x_{10} = x_2 + 2x_7 + 2x_3; \\ &x_9 = -x_3 - x_7; \\ &x_8 = -x_1 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + 3x_9 \end{aligned} \qquad (7)$$

Для величин $x_1 \ldots x_7$ могут быть назначены любые значения. Пользуясь этим произволом, выберем для первого решения $\Pi_1$:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1, \quad x_2 = \ldots = x_7 = 0, \\ &x_{10} = 0, \quad x_9 = 0, \quad x_8 = -1 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения $x_j$ в выражение (3) получим $\Pi_1 = u \cdot x^{-1}$. Остальные безразмерные отношения $\Pi_k (k = 1 \ldots 7)$ получим, полагая в уравнениях (7) последовательно для каждого значения $k = 2,3,4,5,6,7$

$$x_j = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$$ и вычисляя показатели $x_j$ при $j = 8,9,10$.

Матрица решений при этом будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{c|cccccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ & u & \omega & q & l & \delta & r & E & x & \rho & t \\ \hline \Pi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \Pi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ \Pi_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \Pi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \Pi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \Pi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \qquad (8)$$

Используя матрицу решений (8), представим безразмерные отношения в виде:

$$\Pi_1 = \frac{u}{x}; \quad \Pi_2 = \omega t; \quad \Pi_3 = \frac{qt^2}{x^2 \rho}; \quad \Pi_4 = \frac{l}{x} \qquad (9)$$

$$\Pi_5 = \frac{\delta}{x};\ \ \Pi_6 = \frac{r}{x};\ \ \Pi_7 = \frac{Et^2}{x^2\rho}$$

Дополняя список (9) безразмерными основными параметрами $\Pi_8 = \mu$ и $\Pi_9 = \varphi$, примем в качестве искомых критериев подобия модифицированную фундаментальную систему безразмерных комбинаций:

$$\Pi_1 = \frac{u}{x} = idem;\ \ \Pi_2 = \omega t = idem;\ \ \Pi_3 = \frac{qt^2}{x^2\rho} = idem;\ \ \Pi_4 = \frac{l}{x} = idem;$$
$$\Pi_5 = \frac{\delta}{x} = idem;\ \ \Pi_6 = \frac{r}{x} = idem;\ \ \Pi_7 = \frac{Et^2}{x^2\rho} = idem;\ \ \Pi_8 = \mu = idem; \qquad (10)$$
$$\Pi_9 = \varphi = idem$$

Условие (10) в развернутой форме можно записать в виде:

$$\frac{u_м}{x_м} = \frac{u_н}{x_н};\quad \omega_м t_м = \omega_н t_н;\quad \frac{q_м t_м^2}{x_м^2\rho_м} = \frac{q_н t_н^2}{x_н^2\rho_н};\quad \frac{l_м}{x_м} = \frac{l_н}{x_н};$$
$$\frac{\delta_м}{x_м} = \frac{\delta_н}{x_н};\quad \frac{r_м}{x_м} = \frac{r_н}{x_н}:\quad \frac{E_м t_м^2}{x_м^2\rho_м} = \frac{E_н t_н^2}{x_н^2\rho_н};\quad \mu_м = \mu_н; \qquad (11)$$
$$\varphi_м = \varphi_н,$$

где индексы «м» и «н» соответствуют модели и натурной конструкции.

Таким образом, на основе классического прямого моделирования, основанного на анализе размерностей физических величин, получено необходимое и достаточное количество критериев подобия для моделирования корпуса ВЦР при динамических воздействиях.

Однако при экспериментальных исследованиях работы тонкостенных цилиндрических оболочек на моделях из-за ограничений в масштабах толщин приходится иногда отступать от полного геометрического подобия и вводить два или несколько линейных масштабов.

Такой подход к моделированию возможен при использовании аффинного соответствия между моделью и натурой. Данный метод позволяет составить необходимые условия приближенного подобия тонкостенной оболочки при применении “разномасштабных” (аффинных) моделей[1,2,3].

Для установления критериев аффинного подобия ВЦР при динамических воздействиях воспользуемся методом анализа размерностей и рядом основных параметров (1), описывающих процесс движения резервуара.

Матрица размерностей физических величин (1) в системе СИ для единиц измерения $G$ (Н), единицы линейных размеров $L_l$ (м) и толщины $L_\delta$ (м), единицу времени $T$ (с) будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ u & \omega & q & l & \delta & r & E & x & \rho & t \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ L_l \\ L_\delta \\ T \end{array} & \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \qquad (12)$$

Количество независимых безразмерных комплексов $\Pi_k$, составленных из основных параметров, равно $k = n - r = 10 - 4 = 6$.

Матрица решений при этом будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \\ \Pi_5 \\ \Pi_6
\end{array}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\
u & \omega & q & l & \delta & r & E & x & \rho & t \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|}
\Pi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \\
\Pi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\Pi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 4 \\
\Pi_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\Pi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \\
\Pi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1
\end{array}
\qquad (13)
$$

Используя матрицу решений (13), представим безразмерные отношения в виде:

$$
\Pi_1 = \frac{ut}{x^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,;\ \Pi_2 = \omega t\,;\ \Pi_3 = \frac{qEt^4}{x^4\rho^2}\,;\ \Pi_4 = \frac{l}{x}
$$

$$
\Pi_5 = \frac{\delta t}{x^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,;\ \Pi_6 = \frac{r}{t}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\,; \qquad (14)
$$

Критерии аффинного подобия (14) в наиболее удобной форме можно записать в виде:

$$
\Pi_1^* = \Pi_1\Pi_5^{-1} = \frac{u}{\delta}\,;\ \Pi_2^* = \Pi_2\Pi_6 = \omega\cdot r\sqrt{\frac{\rho}{E}}\,;\ \Pi_3^* = \Pi_3\Pi_4^4\Pi_5^{-4} = \frac{ql^4}{E\delta^4}\,;
$$

$$
\Pi_4^* = \Pi_4^{-1} = \frac{x}{l}\,;\Pi_5^* = \Pi_4^2\Pi_5^{-1}\Pi_6^{-1} = \frac{l^2}{\delta\cdot r}\,;\ \Pi_6^* = \Pi_6^{-1} = \frac{t}{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}}
$$

Дополняя список (14) безразмерными основными параметрами $\Pi_7^* = \mu$ и $\Pi_8^* = \varphi$, примем в качестве искомых критериев подобия модифицированную фундаментальную систему безразмерных комбинаций:

$$
\Pi_1^* = \frac{u}{\delta} = idem\,;\ \Pi_2^* = \omega r\sqrt{\frac{\rho}{E}} = idem\,;\ \Pi_3^* = \frac{qt^4}{E\delta^4} = idem\,;
$$

$$
\Pi_4^* = \frac{x}{l} = idem\,;\quad \Pi_5^* = \frac{l^2}{\delta\cdot r} = idem\,;\ \Pi_6^* = \frac{t}{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = idem\,; \qquad (15)
$$

$$
\Pi_7^* = \mu = idem\,;\ \Pi_8^* = \varphi = idem
$$

Условие (15) в развернутой форме можно записать в виде:

$$\frac{u_м}{\delta_м}=\frac{u_н}{\delta_н};\quad \omega_м r_м\sqrt{\frac{\rho_м}{E_м}}=\omega_н r_н\sqrt{\frac{\rho_н}{E_н}};\quad \frac{q_м l_м^4}{E_м \delta^4{}_м}=\frac{q_н l_н^4}{E_н \delta^4{}_н};\quad \frac{x_м}{l_м}=\frac{x_н}{l_н};$$

$$\frac{l^2{}_м}{\delta_м r_м}=\frac{l^2{}_н}{\delta_н r_н}:\quad \frac{t_м}{r_м}\sqrt{\frac{E_м}{\rho_м}}=\frac{t_н}{r_н}\sqrt{\frac{E_н}{\rho_н}};\quad \mu_м=\mu_н;\quad \varphi_м=\varphi_н, \tag{16}$$

где индексы «м» и «н» соответствуют модели и натурной конструкции.

При сложных условиях эксплуатации, когда геометрически подобная модель оболочки имитирует натурную резервуарную конструкцию, заполненную жидкостью, критерии (15) должны быть дополнены, согласно [1], следующими критериями подобия:

$$\varPi_9^*=\frac{H}{l}=idem,\quad \varPi_{10}^*=\frac{E}{\rho_ж jl}=idem \tag{17}$$

В критериях (17) Н - высота налива жидкости; $\rho_ж$ - плотность жидкости; $j$ - ускорение поля массовых сил.

Условие подобия $\varPi_{10}^*=idem$ должно принимать во внимание в задачах, где необходимо учитывать взаимодействие стенки резервуара с гравитационными колебаниями жидкости в резервуаре.

Сравнение условий подобия (16) с критериями подобия (11) для линейных задач вертикальных стальных цилиндрических резервуаров обнаруживает их формальное несовпадение. Однако нетрудно убедиться, что в обоих случаях формулы пересчета с модели на натуру для частот и перемещений, устанавливающие соответствие с внешними нагрузками, будут одинаковыми. Результат не случаен, так как сохраняется линейная зависимость соответственных критериев подобия с общим коэффициентом пропорциональности, равном $r/\delta$.

Установленные зависимости между критериями подобия (11) и (16) могут использоваться не только при экспериментальных исследованиях ВЦР, но и для представления теоретических решений в наиболее общей и содержательной форме.

### Литература


1 Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике – М.: Наука, 1981.- 447с.

2 Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкции – М.: Машиностроение, 1990.-288с.

3 Клечко С.Д. Об аффинности решения задач теории упругости //Труды Новосибирского института инж. ж-д. транспорта. Строительная механика. -Вып.62.-1967. – С.91-95.


### Қорытынды


Мақалада физикалық шамалардың өлшем бірлігін талдау тәсілі негізінде динамикалық әсерлерде тік цилиндрлі резервуар конструкциясының ұқсастық критерийлері анықталған.

Үлгі мен натурадағы резервуар конструкция арасындағы геометриялық және аффиндік ұқсастық жағдайлары қаралды.


### Summary


On the basis of method analysis of measurement of physical largeness is observed the criteria similar construction of vertical cylindrical reservoir at dynamics reaction.

The tasks of geometric and affined suitable of models and natural construction reservoir is considered in this article.