

УДК 621

ДИФРАКЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ЖИДКОСТЬЮ

А.М.Марасулов, В.Н.Печерский
МКТУ им. Х.А.Ясауи, г.Туркестан,
ЮКГУ им.М.Ауезова, г.Шымкент

В работе рассматривается дифракция гармонических волн на параллельных цилиндрических оболочках с жидкостями (или без жидкости) (рисунок 1). Получено точное выражение напряжения, перемещения для цилиндров при действии гармонических волн и окружающей его среды. Уравнение Ляме в векторной форме имеет вид [1,2]:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\vec{U} - \mu\text{rotrot}\vec{U} + \vec{b} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где λ и μ - коэффициенты Ляме, определяемые по формулам; U - вектор перемещений, b - вектор массовых сил. Операторы, входящие в уравнение (1), для системы криволинейных координат приведены в работе [2]. Поставим задачу линейной теории упругости для расчетных схем по рисунку 1 в цилиндрических системах координат r, θ и z . В качестве неизвестных используем компоненты вектора перемещений u_r, u_θ и u_z . Цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими соотношениями: $x=r\cos\theta; y=r\sin\theta; z=z$. Уравнение (1) в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)(u_r)_{rr} + \frac{\mu_2}{r^2}(u_r)_{\theta\theta} + \mu(u_z)_{zz} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_\theta)_{\theta r} + (\lambda + \mu)(u_z)_{zz} + \\ & + \frac{\lambda + 2\mu}{r}(u_r)_r - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2}(u_\theta)_\theta - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2}u_r = 0, \\ & \mu(u_\theta)_{rr} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2}(u_\theta)_\theta + \mu(u_\theta)_{zz} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_r)_{r\theta} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_z)_{z\theta} + \\ & + \frac{\mu}{r^2}(u_r)_\theta - \frac{\mu}{r}u_\theta = 0, \\ & \mu(u_z)_{rr} + \frac{\mu}{r^2}(u_\theta)_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu)(u_z)_{zz} + (\lambda + \mu)(u_r)_{rr} + \\ & + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_\theta)_{\theta z} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_r)_z = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где индексы r, θ и z , проставленные за скобками, обозначают частные производные по соответствующим координатам. Краевые условия на внешней поверхности трубы – условие идеального контакта с грунтом, внутренняя поверхность свободна от напряжения:

$$\begin{aligned} r = R: \quad & u_{r1} = u_{r2}; \quad u_{\theta1} = u_{\theta2}; \quad u_{z1} = u_{z2}, \\ & \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}; \quad \sigma_{r\theta1} = \sigma_{r\theta2}; \quad \sigma_{rz1} = \sigma_{rz2}, \\ r = R_0: \quad & \sigma_{rr2} = 0; \quad \sigma_{r\theta1} = 0; \quad \sigma_{rz1} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индексы “1” и “2” обозначают, соответственно, материал окружающей среды и трубы. Чтобы полностью замкнуть постановку задачи, необходимо к условиям (3) добавить при $r \rightarrow 0$ условия излучения по Зоммерфельду [2].

Рассмотрим задачу динамической линейной теории упругости о воздействии сейсмических волн на трубы, уложенные в высокой насыпи в две нитки и заполненные идеальной сжимаемой жидкостью (рисунок 1). При этом рассмотрим случай, когда волна падает перпендикулярно к оси, соединяющей центры труб, и к продольной оси этих труб. Для решения поставленной задачи принимается биполярная система координат, которая связана с декартовой системой координат следующими соотношениями:

$$x=(a\sin\xi)/(ch\eta-\cos\xi); y=(a\sin\eta)/(ch\eta \cos\xi); z=z, \quad (4)$$

где a - половина расстояния между точками $\eta=-\infty$ и $\eta=\infty$.

Подставив (4) в (3), получим следующее уравнение Гельмгольца в биполярных координатах:

$$\left[\alpha^{-2}(ch\eta - \cos\xi)^2 \left[(v)_{\xi\xi} + (v)_{\eta\eta} \right] + k^2 v = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) в аналитическом виде представляет значительные трудности, которые можно обойти путем нахождения асимметричного решения поставленной задачи для близкой поверхности трубы интересующей нас области. В результате проведенных преобразований получим следующий асимптотический вид уравнения (5):

$$(v)_{\xi\xi} + (v)_{\eta\eta} + (2kae^{\pm\eta})^2 v = 0. \quad (6)$$

Решение уравнение (6) ищем в виде ряда:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left[v_n^a(\eta) \cos n\xi + v_n^b(\eta) \sin n\xi \right] e^{-i\omega t}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6) и приравняв коэффициенты при соответствующих гармониках, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$v_n'' + [(2kae^{\pm\eta})^2 - n^2]v_n = 0. \quad (8)$$

Стандартной заменой

$$v_n(\eta) = z(t); \quad t = \exp(\pm\eta),$$

сводим (8) к уравнению Бесселя вида:

$$t^2 z'' + tz' + (4k^2 a^2 - n^2)z = 0,$$

которое имеет частное решение в виде цилиндрической функции $Z(2ake^{\mp\eta})$, а решение уравнение Гельмгольца запишется как:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \cos n\xi e^{-i\omega t};$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \sin n\xi e^{-i\omega t}.$$

где φ и ψ соответственно потенциалы продольных и поперечных волн.

Теперь поставим краевые условия. Для этого используем условия (4) и замену $r=\eta$ и $\theta=\xi$. Учитывая полученные соотношения, выведем решение краевой задачи для случая падения на две подземные трубы Р-волны сжатия и SV-волны сдвига перпендикулярно к оси Y. Падающая продольная волна имеет вид:

$$\varphi_1^{(i)} = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\alpha_1 \tau) \cos n\xi e^{-i\omega t}; \quad (9)$$

где $\tau=2ae^{\mp\eta}$. Остальные потенциалы перемещений (9) имеют вид:

$$\varphi_1^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 \tau) \cos n\xi e^{-i\omega t};$$

$$\psi_1^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 \tau) \sin n\xi e^{-i\omega t};$$

$$\varphi_2^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n H_n^{(1)}(\alpha_1 \tau) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 \tau) \cos n\xi e^{-i\omega t};$$

$$\psi_2^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n H_n^{(1)}(\beta_2 \tau) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 \tau) \sin n\xi e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

$$\varphi_3^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n J_n^{(1)}(\alpha_3 \tau) \cos n\xi e^{-i\omega t}.$$

Динамическое напряженно-деформированное состояние выражается через потенциалы φ_1 и ψ_2 . Произвольные постоянные A_n , B_n , C_n и др. определяются из системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$[C]\{q\}=\{p\},$$

где $[C]$ - определитель (12×12) порядка, элементы которого являются функцией Бесселя и Ханкеля 1-го, 2-го рода n -го порядка; $\{q\}$ - вектор-столбец неизвестных величин; $\{p\}$ - вектор правой части. Система алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами решается методом Гаусса с выделением главного элемента. Рассмотрим задачи о взаимодействии волн на двух одинаковых круглых цилиндрических оболочках радиуса R_1 , расположенных на расстоянии $2a$ один от другого (рисунок 1). Вычисления были выполнены на ЭВМ. Изучена зависимость кольцевых усилий от безразмерного волнового число Ω , ($\Omega = \alpha a$). При вычислении суммы (10) удерживаемый член ряда составил менее 1% от суммы ряда. При всех вычислениях

коэффициенты Пуассона принимались равными $\nu_1 = 0,20$; $\nu_2 = 0,29$; остальные исходные данные принимают следующие значения: $\frac{E_1}{E_2} = 0,2$, $\frac{E_3}{E_2} = 1,0$, $\frac{E_1}{E_2} = 1,0$, $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,6$, $\frac{\rho_3}{\rho_2} = 1,0$.

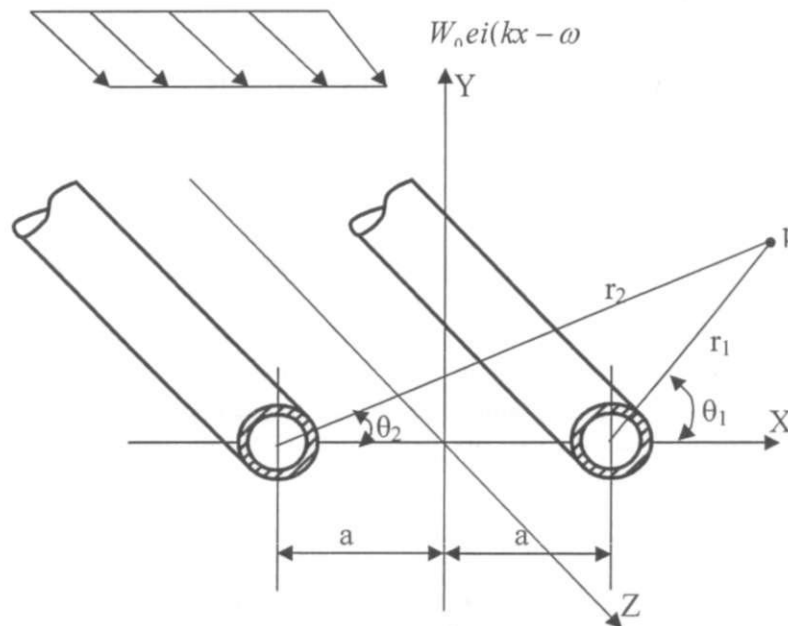


Рисунок 1 - Схема задачи с двумя одинаковыми цилиндрическими оболочками

На рисунке 2 представлен график изменения кольцевого напряжения в цилиндрическом теле при различных схемах укладки.

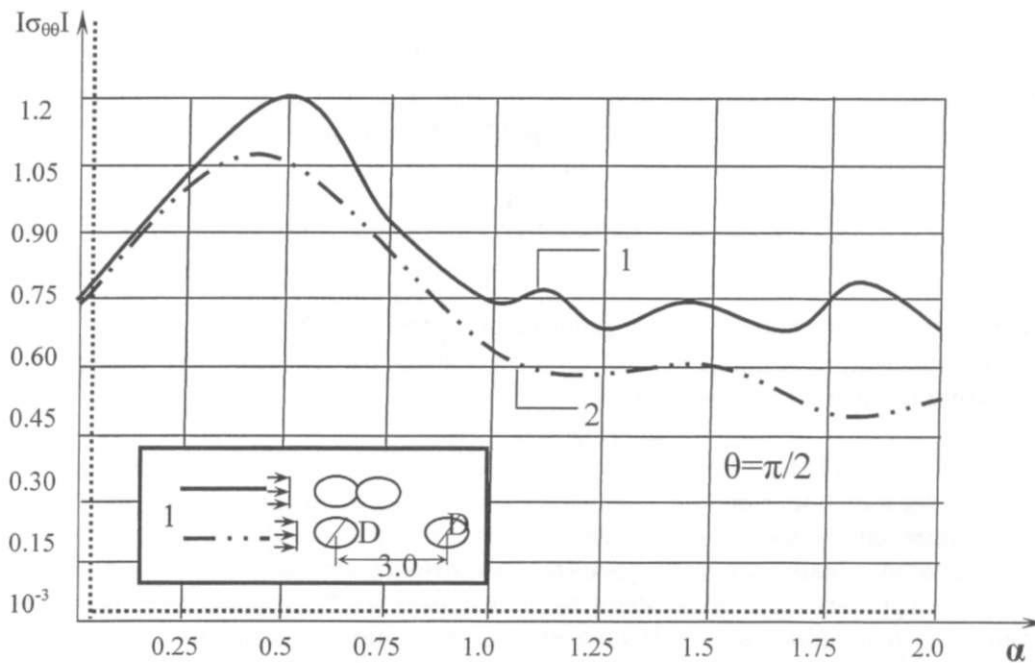


Рисунок 2 - Изменения кольцевого напряжения в цилиндрическом теле

Из рисунка 2 следует, что наибольшее значение величина σ_{\max} достигает для плотно уложенных труб ($d=0$), а наименьшее - при $d \geq 3,0D$. В последнем случае величина σ_{\max} для труб двухниточной укладки и для одиночной трубы совпадают. Таким образом, при $d < 3,0D$ динамическое давление σ_{\max} на железобетонные трубы двухниточной укладки больше, чем на одиночную трубу. Это превышение достигает 15% и объясняется наложением волн, отраженных двумя поверхностями близлежащих труб. Наличие жидкости в трубах, как правило, увеличивает давление σ_{\max} на 20% для одиночной трубы и на 5-10% - для двухниточной трубы. Исключения составляют плотно уложенные трубы, $d=9$, для которых давление σ_{\max} уменьшается на 4%.

Литература

- 1 Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неоднородных средах и конструкциях.-Ташкент: Фан, 1992. -С. 250.
- 2 Pao Y.H. and Mow C.C. Diffraction of Elastic Waves of Dynamic stress concentrations, crane.-New York: Russak and Company, 1973.
- 3 Baron M.L. and Parnes A.T. Diffraction of a Pressure Wave by a cylindrical Cavity in an Elastic medium // ASME Journal of Applied Mechanics.- 1961.-Vol. 28.-P. 347-354.

Қорытынды

Мақалада параллель орналасқан сұйықтықпен толтырылған цилиндрлі қабықшалардың гармоникалық тербелістің дифракциясы қарастырылған. Есеп биполярдык координатор көмегімен шешілген. Есептің нәтижесі бойынша қабықшадағы сұйық жалғыз жатқызылған құбырдағы динамикалық қысымды 20 %, ал қос жатқызылған құбырлардағы динамикалық қысымды 5-10 % өсуі анықталды.

Summary

In job is considered diffraction harmonic of waves on parallel cylindrical environments with liquid. The task is decided with the help of bipolar coordinates. On the basic of the received numerical results is established, that the presence of a liquid increases pressure by 20% for a single pipe and on 5-10% of for two nit of a pipe.