УДК 513.83

ВЫВОД ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ УИЗЕМА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛОКАЛЬНОСТИ В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ

М.А.Серимбетов, А.У.Лесбаев, А.М.Бренер
ЮКГУ им. М.Ауезова, г.Шымкент

В последнее время явление нелокальности в сложных физико-химических системах стало предметом многих исследований [1-3]. Это связано с тем, что использование обычных уравнений переноса параболического типа для описания высокоградиентных процессов переноса становится некорректным и приводит к неадекватным моделям [1,4]. В то же время учет нелокальности переноса тепла и массы приводит к значительному усложнению математических моделей и делает их существенно нелинейными.

Полный учет нелинейностей, в свою очередь, представляет чрезвычайно сложную задачу. Поэтому для описания пространственной нелокальности целесообразно использовать модельные подходы, предложенные в работах [5-6]. В настоящей работе развивается один из возможных подходов к отмеченной проблеме, основанный на обобщении уравнения Уизема.

Интегро-дифференциальное уравнение Уизема является одной из моделей, эффективно описывающих нелинейные волны в сильно диспергирующих средах [4]:

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - x_1) u_{x_1}(x_1, t) dx_1 = 0, \tag{1}$$

Функция u может интерпретироваться как локальное отклонение химического потенциала ν от равновесного значения:

$$\Delta\nu = u. \tag{2}$$

Для обоснования использования уравнения Уизема в нелокальных задачах тепло- и массопереноса и для его обобщения запишем закон переноса в виде интегрального оператора:

$$J = \int_{\Omega} N(\eta; u) \nabla u(x_1, t) dx_1, \tag{3}$$

где N - ядро интегрального оператора, $\eta = x - x_1$.

Интегрируя по частям, получаем:

$$J = \int_{\Omega} N(\eta; u) \nabla u(x_1, t) dx_1 = (uN(\eta; u))\big|_{\Gamma} + \int_{\Omega} u \frac{\partial N(\eta; u)}{\partial \eta} dx_1, \tag{4}$$

где Ω, Γ - соответственно область интегрирования и граница этой области.

Будем предполагать, что пространственная нелокальность быстро убывает [5]:

$$\lim_{|\eta| \to \infty} N(\eta; u) = 0. \tag{5}$$

Разложим функцию $G(\eta; u) = \dfrac{\partial N(\eta; u)}{\partial \eta}$ в ряд Тейлора в окрестности равновесных потенциалов:

$$G(\eta; u) = \sum_k G_{(k)}(\eta) u^k. \tag{6}$$

Тогда после ряда преобразований, обоснованных в работе [6], приходим к уравнению:

$$u_t + \nabla \cdot \int_{\Omega} \left(\sum_k G_{(k)}(\eta) u^{k+1} \right) dx_1 = I, \tag{7}$$

где I - источник массы в системе.

Как показано в [6], операторы дифференцирования и свертки в данном случае коммутируют.

Тогда (7) можно переписать в виде:

$$u_t + \int_{\Omega} \sum_k (k+1) G_{(k)}(\eta) u^k u_{x_1} dx_1 = I. \tag{8}$$

В отличие от работ [5, 6], сохраним нелинейные члены уравнения (8) вплоть до третьего порядка малости:

$$u_t + \int_{\Omega} G_{(0)}(\eta) u_{x_1} ds + 2 \int_{\Omega} G_{(1)}(\eta) u u_{x_1} dx_1 + 3 \int_{\Omega} G_{(2)}(\eta) u^2 u_{x_1} = I. \tag{9}$$

В работах [5, 6] установлено, что для изотропной среды ядра уравнение (9) имеет вид:

$$G_{(k)} = G^0_{(k)} \exp\left(-\frac{\lambda_{(k)}}{r_{(k)}} |\eta| \right), \tag{10}$$

где $r_{(k)}$ - пространственная шкала k- го порядка, $\lambda_{(k)} = O(1)$ - некоторые коффициенты.

В соответствии со слабонелинейным приближением пространственные шкалы образуют убывающий ряд по k. При быстром убывании $r_{(k)}$ с ростом k положим:

$$\int_{\Omega} G_{(1)}(\eta) u u_{x_1} dx_1 \approx \chi_1 \int_{\Omega} G_{(1)}^0 \delta(x - x_1) u u_{x_1} dx_1 = \chi_1 G_{(1)}^0 u u_x , \tag{11}$$

$$\int_{\Omega} G_{(2)}(\eta) u^2 u_{x_1} dx_1 \approx \chi_2 \int_{\Omega} G_{(2)}^0 \delta(x - x_1) u^2 u_{x_1} dx_1 = \chi_2 G_{(2)}^0 u^2 u_x , \tag{12}$$

где χ_1 и χ_2 - нормализующие коэффициенты.

Теперь уравнение переноса приобретает вид обобщенного уравнения Уизема:

$$u_t + 2\chi_1 G_{(1)}^0 u u_x + 3\chi_2 G_{(2)}^0 u^2 u_x + \int_{\Omega} G_{(0)}(x - s) u_s ds = I . \tag{13}$$

В случае слабой нелинейности, когда можно пренебречь членами третьего порядка, уравнение (13) можно преобразовать к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Для этого будем искать решения уравнения (13) в виде асимптотического ряда:

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j u_j , \tag{14}$$

где член нулевого порядка имеет форму уединенной бегущей волны:

$$u_0 = u_0(\varsigma - ct). \tag{15}$$

После интегрирования в нулевом порядке получаем:

$$c u_0 - \frac{1}{2} u_0^2 + const = \int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1) u_0 dx_1 . \tag{16}$$

Для корректного дифференцирования по параметру ς перепишем интегральный оператор в виде:

$$\int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1) u_0 ds = G_{(0)}^0 \left[\int_{-\infty}^{\varsigma} \exp\left(-\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}} (\varsigma - x_1) \right) u_0 dx_1 + \right.$$
$$\left. + \int_{\varsigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}} (x_1 - \varsigma) \right) u_0 dx_1 \right]. \tag{17}$$

В результате двухкратного дифференцирования получаем:

$$\left(\frac{d^2}{d\varsigma^2} - \frac{\lambda_{(0)}^2}{r_{(0)}^2} \right) \int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1) u_0 dx_1 = -2 G_{(0)}^0 \frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}} u_0 . \tag{18}$$

Используя соотношение (18), приводим уравнение (16) к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(c - u_0)^2 u_{0\xi}^2 = \frac{\lambda_{(0)} u_0^2}{r_{(0)}} \left[\frac{\lambda_{(0)} u_0^2}{8 r_{(0)}} + \left(\frac{2 G_{(0)}^0}{3} - \frac{c \lambda_{(0)}}{2 r_{(0)}} \right) u_0 + c \left(\frac{c \lambda_{(0)}}{2 r_{(0)}} - G_{(0)}^0 \right) \right]. \tag{19}$$

Если фазовая скорость c удовлетворяет неравенству

$$c < c^* , \quad \text{где} \quad c^* = \frac{8}{3} G_{(0)}^0 \left(\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}} \right)^{-1} , \tag{20}$$

то в результате разложения на множители выражения в правой части (19) получаем:

$$u_{0\xi}^2 = \frac{\lambda_{(0)}^2}{8 r_{(0)}^2} u_0^2 \frac{(u_0 - u_{01})(u_0 - u_{02})}{(u_0 - c)^2} , \tag{21}$$

где

$$u_{01;02} = 2c - c^* \pm \sqrt{c^* (c^* - c)} . \tag{22}$$

Фазовый портрет соответствующей динамической системы показан на рисунке 1. Петля на фазовом портрете соответствует решению типа уединенной бегущей волны, способной распространяться на большие расстояния с малым изменением профиля [7].

Как следует из (22), амплитуда такой волны достигает максимального значения при фазовой скорости, удовлетворяющей соотношению

$$c = c^*. \tag{23}$$

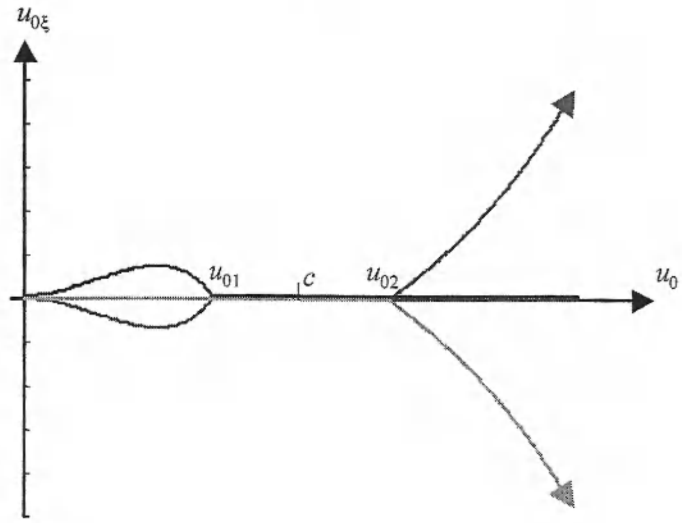

Рисунок 1- Фазовый портрет динамической системы (21)

Для последующих приближений u_j в разложении (14) получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. Как установлено в [6], решения этих уравнений не могут внести существенные искажения в профиль нулевого приближения.

Литература

1 Brener A.M., Muratov A.S., Tashimov L. Non-linear model of time dependent relaxation cores for the systems with cross transfer effects. Proceedings of the Advan. Comp. Methods in Heat Transfer, VIII.- Lisbon, 2004.-P.321-332,.

2 Ким Л.А., Бренер А.М. Временная нелокальность уравнений переноса тепла и массы в интенсивных технологических процессах // ТОХТ.-Т. 30, №3.-1996.-С. 258-262.

3 Ким Л.А., Бренер А.М. Учет перекрестных эффектов в нелокальных уравнениях переноса тепла и массы // ТОХТ.- 1998.- Т. 32, №3.-С.247-250.

4 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, 1977.

5 Brener A.M., Serimbetov M.A., Musabekova L.M. Non-local equations for concentration waves in reacting diffusion systems. Comp. Methods and Exper. Measur. XII, Southampton.-Boston, 2005.-P.93-103.

6 Бренер А.М. Нелокальные уравнения переноса тепла и массы в технологических процессах// ТОХТ.-Т. 40, №6.-2006.-С.1-9.

7 Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн.-М.:МГУ, 1988.

Қорытынды

Жұмыста локальды емес жүйелердегі массаның ауысу процесін сипаттауға қолданылатын үшінші ретті түзетулерді есепке ала отырып, Уиземнің жалпы интегро-дифференциалдық теңдеуінің шығарылуы келтірілген.

Summary

The paper deals with generalized integro-differential Whitham equation with allowing for three-order terms applying to deriving mass transfer processes in the non-local systems.