ӘОЖ 519.677

КОРОБОВ КЛАСЫНДАҒЫ КУБАТУРАЛЫҚ ФОРМУЛАЛАР АРҚЫЛЫ АНЫҚТАЛҒАН ҚАЛЫПҚА КЕЛТІРУ ОПЕРАТОРЫНЫҢ $L^\infty(0,1)^s$ МЕТРИКАСЫНДАҒЫ ҚАТЕСІ

С.С.Құдайбергенов, Э.Б.Джаулыбаева
М. Әуезов атындағы ОҚМУ, Шымкент қ.

N және s ($N,s=1,2,\ldots$) -натурал сандар. $F \subset$ R($[0,1]^s$) –Риман бойынша интегралданатын функциялар жиыны, $F \subset Y$ -нормаланған кеңістік. Егер $\xi_k \in [0,1]^s$ $(k=1,\ldots,N), \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ берілсе, онда

$$\delta(\xi, g_N; F)_Y = \sup_{f\in F}\left\| f(x) - g_N\left(f(\xi_1),\ldots, f(\xi_N); x\right)\right\|_Y$$

$$\delta_N(F)_y = \inf_{\xi, g_N \in Z^s} \delta(\xi, g_N; F)_Y .$$

$$L^\infty(0,1)^s = \left\{ f(x_1,\ldots,x_s) : \|f\|_{L^\infty(0,1)^s} = \sup_{x\in[0,1]^s} vrayf(x) < +\infty \right\}.$$

Алдағы уақытта қолданылатын кейбір белгілеулерді көрсетіп өтейік. $c(\ldots)$-арқылы оң шаманы белгілейміз, және ол жақша ішіндегі параметрлерге тәуелді болады. A мен B оң болғанда $B=O_{\alpha,\beta,\ldots}(A)$ немесе $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$ дегеніміз $|B| \le c(\alpha,\beta,\ldots)A$ мағына береді. Оң таңбалы A және B-лар үшін $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\overset{\cup}{\cap}} B$ жазуы $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$ деп түсініледі.

Квадратуралық формула арқылы қалыпқа келтіру операторын құру көптеген авторлардың жұмысында кездескен (Коробов [2 қар.] және т.б.). Бірақ бұл жұмыстарда барлық коэффициентке ортақ квадратуралық формуланы алған болатын. Шерниязов [4 қар.] осы жолды жетілдіріп, коэффициенттерді белгілі бір топқа бөліп, әр топқа жеке квадратуралық формуланы Коробовтың түйіндері арқылы құралған қалыпқа келтіру операторын пайдалана отырып SW және E кластарында келесі нәтижелер алған

1) r>1 болғанда

$$N^{-(r-1)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_n} \sup_{f\in E_s^r} \sup_{x\in R^s} \left| f(x) - (T_N f)(x) \right| \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1)} \ln^{r(s-1)} N$$

$$N^{-(r-1/2)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_n} \sup_{f\in E_s^r} \left\| f(\cdot) - (T_N f)(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1/2)} \ln^{r(s-1)} N$$

2) r>1/2 болғанда

$$N^{-(r-1/2)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_N} \sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x\in R^s} \left| f(x) - (T_N f)(x) \right| \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1/2)} (\ln N)^{(r+1/2)(s-1)}$$

Мақаланың негізгі мақсаты Коробов класында Смоляктың түйіндерін пайдалана отырып, алдымен тригонометриялық Фурье коэффциенттеріне жуықтау арқылы белгілі топтарға бөліп, Шерниязовтың әдісімен қалыпқа келтіру операторының функцияда қателігін $L^\infty(0,1)^s$ метрикасында жоғарыдан бағалау болатын.

Белгілі бір кластағы функцияны қалыпқа келтіру операторларын құру келесі тұжырымдарға негізделген.

$f \in F$ және

$$f(x) = \sum_{n\in Z^s} \hat f(n) e^{2\pi i(n,x)} = \sum_{n\in V} \hat f(n) e^{2\pi i(n,x)} + \sum_{n\in Z^s\setminus V} \hat f(n) e^{2\pi i(n,x)}$$

болсын.

Әрбір $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$ үшін $\nu_j(0)=0,\quad 2^{\nu_j-2}<\left|n_j\right|\le 2^{\nu_j-1}$. (1)

ереже бойынша $(\nu_1(n),...,\nu_s(n))$ векторы сәйкес қойылсын. Онда $q>0$ саны үшін келесі жиынды анықтайық:

$$V=V_q=\{n\in Z^s:\nu_1(n)+...+\nu_s(n)<q\} \tag{2}$$

$n\in V_q\subset Z^s$ үшін теңдіктен $\hat f(n)=\Lambda_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})-\Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$,

$$f(x)-\sum_{n\in V}\Lambda_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})\cdot e^{2\pi i(n,x)}=\sum_{n\in V}\Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})\cdot e^{2\pi i(n,x)}+\sum_{n\in Z^s\setminus V}\hat f(n)e^{2\pi i(n,x)}$$

аламыз, мұндағы

$$\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})=\sum_{\ell=1}^{s-1}(-1)^\ell\binom{s-\ell}{\ell}\sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}\\ \nu_1+...+\nu_s=q-\ell}}\frac{1}{2^{q-\ell}}\sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}}...\sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}}f(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}})e^{-2\pi i\left(n_1\frac{k_1}{2^{\nu_2}}+...+n_s\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)} \tag{3}$$

Осы теңдіктің оң жағын белгілі бір метрикада бағалай алсақ, онда F класта f функциясын қалыпқа келтірдік деген сөз.

Лемма. q және s (N,s=1,2,....) натурал сандары берілсін. Онда кез- келген $n\in Z^s$ үшін келесі теңдік орынды, $(\bar y=\max(1,|y|))$

$$\sup_{f(x)\in E_s^r}\left|\hat f(n)-\Lambda_{n,q}(f)\right|\underset{\frown}{\smile}\frac{(q-(\nu_1(n)+...+\nu_s(n)))^{s-1}}{2^{qr}}\underset{\frown}{\smile}\frac{(q-\log_2\bar n_1,...\bar n_s)^{s-1}}{2^{qr}}$$

мұндағы

$$\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})=\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega(\nu(n),q)}\frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}}\sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}}...\sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}}(-1)^{\sum_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}(\nu_j-\nu_j^n)}f(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}})e^{-2\pi i\left(n_1\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+...+n_s\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)}$$

квадратуралық формула, ал $(\nu_1(n),...,\nu_s(n))$ векторлары $2^{\nu_j(n)-2}<\left|n_j\right|\le 2^{\nu_j(n)-1}$ ережесімен анықталған.

Лемма. α,β-нақты сандар берілсін. Онда

$$\sum_{k=1}^{q}2^k(q-k+1)^\alpha k^\beta\underset{\alpha,\beta}{\underset{\frown}{\smile}}2^q q^\beta,(q\to\infty)$$

Теорема. s және q натурал сандары берілсін және r>1 болсын. Онда келесі теңдік орынды

$$\inf_{\xi_N,\varphi_N\in Z^s}\{\ \sup_{f:\|f\|_{E_s^r}}\|f(x)-\varphi_N(f(\xi_1),...,f(\xi_s);x)\|_{L^\infty(0,1)^s}:\xi_1\in[0,1]^s,...,\xi_s\in[0,1]^s;\varphi_N:C^N\times[0,1]^s\to C\ \}<<$$

$$<<\sup_{f:\|f\|_{E_s^r}}\left\|f(x)-\sum_{n\in V_q}\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,x)})e^{2\pi i(n,x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}<<\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$$

мұндағы $\nu_j(n)$ векторы (1) формуласымен, V жиыны (2) формуласымен, ал $\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$ - (3) формуласымен анықталған.

Дәлелдеуі. Леммада $\Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$ қалдығын бағалаған едік. Сол лемма негізінде

$$\left\|f(x)-\sum_{n\in V}\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}=$$

$$=\left\|\sum_{n\in V}\Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)}+\sum_{n\in Z/V}\hat f(n)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}<<$$

$$<<\left\|\sum_{n\in V_q}\Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}+\left\|\sum_{n\in Z/V_q}\hat{f}(n)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}=I_1+I_2.$$

I_1-ді бағалайық:

$$I_1=\left\|\sum_{n\in V_q}\Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}\le\sum_{n\in V_q}\left\|\Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}\le$$

$$\le\sum_{\bar{n}\in V_q}\|f\|_{E_s^r}\frac{[q-\log_2\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s]^{s-1}}{2^{qr}}\le\sum_{\bar{n}\in V_q}\|f\|_{E_s^r}\frac{[q-\log_2\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s]^{s-1}}{2^{qr}}\le$$

$$\le\|f\|_{E_s^r}\frac{1}{2^{qr}}\sum_{n\in V_q}[q-\log_2\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s]^{s-1}$$

1-ші және 2-ші лемма бойынша

$$\sum_{1\le\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s\le 2^q}(q-\log_2\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^{s-1}\le\sum_{k=1}^{q}(q-k)^{s-1}\sum_{2^{k-1}\le n_1\cdots n_s<2^k}1<<\sum_{k=1}^{q}2^k\cdot k^{s-1}\cdot(q-k)^{s-1}<<2^q\cdot q^{s-1}$$

Демек, $\sum_{\bar{n}\in V}\frac{[q-\log_2\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s]^{s-1}}{2^{qr}}\underset{\cap}{\cup}\frac{2^q\cdot q^{s-1}}{2^{qr}}=\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$

Сонымен $I_1<<\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$.

Енді I_2 бағалайық:

$$I_2=\left\|\sum_{n\in Z^s/V_q}\hat{f}(n)e^{2\pi i(n;x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}\le\sum_{n\in Z^s\setminus V_q}\left|\hat{f}(n)e^{2\pi i(n,x)}\right|\le\sum_{n\in Z^s\setminus V_q}\hat{f}(n)\frac{(n_1\cdots n_s)^r}{(n_1\cdots n_s)^r}<\|f\|_{E_s^r}\sum_{k=q}^{\infty}\frac{1}{2^{kr}}\sum_{2^k\le n_1\cdots n_s\le 2^{k+1}}1\underset{\cap}{\cup}\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$$

Олай болса,

$$\underset{f:\|f\|_{E_s^r}}{Sup}\left\|f(x)-\sum_{n\in V_q}\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,x)})e^{2\pi i(n,x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}<<\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$$

Теорема дәлелденді.

Әдебиет

1 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем.сб.1990.Т. 181, №4.С. 490-505.

2 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций //Докл.АН СССР.1963.Т.148,№5.С.1042-1045.

3 Темиргалиев Н. Классы $U_S(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы//Докл.РАН. 2003.Т.393.№5.С.605-608.

4 Шерниязов. К.Е. Оптимальное восстановление в метрике L^2 решений уравнения теплопроводности с начальными температурами из классов Соболева// I-съезд математиков Казахстана:Тезисы докл.- Шымкент,1996.

Резюме

В данной научной работе восстановлена функция на классе Коробова E_s^r с применением произведения функционалов в норме $L^\infty(0,1)^s$.

Summary

In the given scientific work it is restored function on class Korobova with by application products functional in norm $L^\infty(0,1)^s$.