ӘОЖ 519.677

СОБОЛЕВ КЛАСЫНДАҒЫ КУБАТУРАЛЫҚ ФОРМУЛАЛАР АРҚЫЛЫ АНЫҚТАЛҒАН ҚАЛЫПҚА КЕЛТІРУ ОПЕРАТОРЫНЫҢ $L^{\infty}(0,1)^s$ МЕТРИКАСЫНДАҒЫ ҚАТЕСІ

С.С.Құдайбергенов, Ұ.Жүнісбекова
М. Әуезов атындағы ОҚМУ, Шымкент қ.

N және s (N,s=1,2,....) -натурал сандар. $F \subset$ R([0,1]^s) –Риман бойынша интегралданатын функциялар жиыны, $F \subset Y$ -нормаланған кеңістік. Егер $\xi_k \in [0,1]^s$ $(k=1,...,N), \xi = (\xi_1,...,\xi_N)$ берілсе, онда

$$\delta(\xi, g_N; F)_Y = \sup_{f \in F} \left\| f(x) - g_N\left(f(\xi_1),.., f(\xi_N); x\right) \right\|_Y$$

$$\delta_N(F)_y = \inf_{\xi, g_N \in Z^s} \delta(\xi, g_N; F)_Y .$$

$$L^{\infty}(0,1)^s = \left\{ f(x_1,...,x_s) : \|f\|_{L^{\infty}(0,1)^s} = \sup_{x \in [0,1]^s} vrayf(x) < +\infty \right\}.$$

Алдағы уақытта қолданылатын кейбір белгілеулерді көрсетіп өтейік, $c(...)$-арқылы оң шаманы белгілейміз, және ол жақша ішіндегі параметрлерге тәуелді болады. A мен B оң болғанда $B=O_{\alpha,\beta}(A)$ немесе $B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ дегеніміз $|B| \le c(\alpha,\beta,...)A$ мағына береді. Оң таңбалы A және B-лар үшін $A \underset{\alpha,\beta,...}{\overset{\cup}{\cap}} B$ жазуы $A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ деп түсініледі.

Квадратуралық формула арқылы қалыпқа келтіру операторын құру көптеген авторлардың жұмысында кездескен (Коробов [2 қар.] және т.б.). Бірақ, бұл жұмыстарда барлық коэффициентке ортақ квадратуралық формуланы алған болатын. Шерниязов [4 қар.] осы жолды жетілдіріп, коэффициенттерді белгілі бір топқа бөліп, әр топқа жеке квадратуралық формуланы Коробовтың түйіндері арқылы құралған қалыпқа келтіру операторын пайдалана отырып SW және E кластарында келесі нәтижелер алған

1) r>1 болғанда

$$N^{-(r-1)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_n} \sup_{f \in E_s^r} \sup_{x \in R^s} \left| f(x) - (T_N f)(x) \right| \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1)} \ln^{r(s-1)} N$$

$$N^{-(r-1/2)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_n} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(\cdot) - (T_N f)(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1/2)} \ln^{r(s-1)} N$$

2) r>1/2 болғанда

$$N^{-(r-1/2)} \underset{r,s}{<<} \inf_{T_N} \sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in R^s} \left| f(x) - (T_N f)(x) \right| \underset{r,s}{<<} N^{-(r-1/2)} (\ln N)^{(r+1/2)(s-1)}$$

Мақаланың негізгі мақсаты Соболев класында Смоляктың түйіндерін пайдалана отырып, алдымен тригонометриялық Фурье коэффциенттеріне жуықтау арқылы белгілі топтарға бөліп, Шерниязовтың әдісімен қалыпқа келтіру операторының функцияда қателігін $L^{\infty}(0,1)^{s}$ метрикасында жоғарыдан бағалау болатын.

Белгілі бір кластағы функцияны қалыпқа келтіру операторларын құру келесі тұжырымдарға негізделген.

$f \in F$ және

$$f(x) = \sum_{n\in Z^s} \hat{f}(n) e^{2\pi i(n,x)} = \sum_{n\in V} \hat{f}(n) e^{2\pi i(n,x)} + \sum_{n\in Z^s \setminus V} \hat{f}(n) e^{2\pi i(n,x)}$$

болсын.

Әрбір $n = (n_1,\dots,n_s) \in Z^s$ үшін $\nu_j(0) = 0, \quad 2^{\nu_j - 2} < |n_j| \le 2^{\nu_j - 1}$. (1)

ереже бойынша $(\nu_1(n),\dots,\nu_s(n))$ векторы сәйкес қойылсын. Онда $q > 0$ саны үшін келесі жиынды анықтайық:

$$V = V_q = \{ n \in Z^s : \nu_1(n) + \dots + \nu_s(n) < q \} \tag{2}$$

$n \in V_q \subset Z^s$ үшін теңдіктен $\hat{f}(n) = \Lambda_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)}) - \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$,

$$f(x) - \sum_{n\in V} \Lambda_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)}) \cdot e^{2\pi i(n,x)} = \sum_{n\in V} \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)}) \cdot e^{2\pi i(n,x)} + \sum_{n\in Z^s\setminus V} \hat{f}(n) e^{2\pi i(n,x)}$$

аламыз, мұндағы

$$\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)}) = \sum_{\ell=1}^{s-1} (-1)^{\ell} \binom{s-\ell}{\ell} \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0} \\ \nu_1+\dots+\nu_s = q-\ell}} \frac{1}{2^{q-\ell}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n_1\frac{k_1}{2^{\nu_2}}+\dots+n_s\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)} \tag{3}$$

Осы теңдіктің оң жағын белгілі бір метрикада бағалай алсақ, онда F класта f функциясын қалыпқа келтірдік деген сөз.

Лемма. q және s (N,s=1,2,....) натурал сандары берілсін. Онда кез- келген $n \in Z^s$ үшін келесі теңдік орынды, $(\bar{y} = \max(1,|y|))$

$$\sup_{f(x)\in SW_2^r(0,1)^s} \left|\hat{f}(n) - \Lambda_{n,q}(f)\right| \asymp \frac{(q-(\nu_1(n)+\dots+\nu_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \asymp \frac{(q-\log_2 \bar{n}_1,\dots\bar{n}_s)^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}}$$

мұндағы

$$\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)}) = \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega(\nu(n),q)} \frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} (-1)^{\sum_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}(\nu_j-\nu_j^n)} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n_1\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+\dots+n_s\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)}$$

квадратуралық формула, ал $(\nu_1(n),\dots,\nu_s(n))$ векторлары $2^{\nu_j(n)-2} < |n_j| \le 2^{\nu_j(n)-1}$ ережесімен анықталған.

Лемма. α, β-нақты сандар берілсін. Онда

$$\sum_{k=1}^{q} 2^k (q-k+1)^{\alpha} k^{\beta} \asymp_{\alpha,\beta} 2^q q^{\beta}, (q \to \infty)$$

Теорема. s және q натурал сандары берілсін және r> $\frac{1}{2}$ болсын. Онда келесі теңдік орынды

$$\inf_{\xi_N,\varphi_N\in Z^s} \left\{ \sup_{f:\|f\|_{SW_2^r}} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi_1),\dots,f(\xi_s);x) \right\|_{L^{\infty}(0,1)^s} : \xi_1 \in [0,1]^s,\dots,\xi_s \in [0,1]^s; \varphi_N : C^N \times [0,1]^s \to C \right\} <<$$

$$<< \sup_{f:\|f\|_{SW_2^r}} \left\| f(x) - \sum_{n\in V_q} \Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,x)}) e^{2\pi i(n,x)} \right\|_{L^{\infty}(0,1)^s} << \frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$$

мұндағы $\nu_j(n)$ векторы (1) формуласымен, V жиыны (2) формуласымен, ал $\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$ - (3) формуласымен анықталған.

Дәлелдеуі. Леммада $\Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;x)})$ қалдығын бағалаған едік. Сол лемма негізінде

$$\left\| f(x) - \sum_{n\in V} \Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{2\pi i(n,\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} =$$

$$= \left\| \sum_{n\in V} \Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)} + \sum_{n\in Z/V} \hat{f}(n)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} <<$$

$$<< \left\| \sum_{n\in V_q} \Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} + \left\| \sum_{n\in Z/V_q} \hat{f}(n)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} = I_1 + I_2.$$

I_1-ді бағалайық:

$$I_1 = \left\| \sum_{n\in V_q} \Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} \le \sum_{n\in V_q} \left\| \Delta_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n;\bullet)}\right)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} \le$$

$$\le \sum_{\bar{n}\in V_q} \|f\|_{SW_s^r} \frac{\left[q - \log_2 \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s\right]^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \le \sum_{\bar{n}\in V_q} \|f\|_{SW_s^r} \frac{\left[q - \log_2 \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s\right]^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \le$$

$$\le \|f\|_{SW_s^r} \frac{1}{2^{qr}} \sum_{n\in V_q} \left[q - \log_2 \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s\right]^{\frac{s-1}{2}}$$

1-ші және 2-ші лемма бойынша

$$\sum_{1\le \bar{n}_1\cdots\bar{n}_s \le 2^q} (q - \log_2 \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s)^{\frac{s-1}{2}} \le \sum_{k=1}^{q} (q-k)^{\frac{s-1}{2}} \sum_{2^{k-1}\le n_1\cdots n_s < 2^k} 1 << \sum_{k=1}^{q} 2^k \cdot k^{s-1} \cdot (q-k)^{\frac{s-1}{2}} << 2^q \cdot q^{s-1}$$

Демек, $\sum_{\bar{n}\in V} \frac{\left[q - \log_2 \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s\right]^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \begin{smallmatrix}\cup\\ \cap\end{smallmatrix} \frac{2^q \cdot q^{s-1}}{2^{qr}} = \frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$

Сонымен $I_1 << \frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$. (1)

Енді I_2 бағалайық:

$$I_2 = \left\| \sum_{n\in Z^s/V_q} \hat{f}(n)e^{2\pi i(n;x)} \right\|_{L^\infty(0,1)^s} \le \sum_{n\in Z^s\setminus V_q} \left| \hat{f}(n)e^{2\pi i(n,x)} \right| \le \sum_{n\in Z^s\setminus V_q} \hat{f}(n) \frac{(n_1\cdots n_s)^r}{(n_1\cdots n_s)^r} < \sum_{n\in Z^s\setminus V_q} \hat{f}(n)(n_1\cdots n_s)^r \cdot \frac{1}{(n_1\cdots n_s)^r}.$$

Соңғы теңдікке Гельдер теңсіздігін пайдалансақ, онда

$$\sum_{n\in Z^s\setminus V_q}\hat{f}(n)\cdot(n_1\cdots n_s)^r\cdot\frac{1}{(n_1\cdots n_s)^r}\le\left[\sum_{n\in Z^s\setminus V_q}\left(\hat{f}(n)\cdot(n_1\cdots n_s)^r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sum_{n\in Z^s\setminus V_q}\left(\frac{1}{(n_1\cdots n_s)^r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\|f\|_{SW_s^r}\left[\sum_{k=q}^{\infty}\sum_{2^k\le n_1\cdots n_s\le 2^{k+1}}\frac{1}{(n_1\cdots n_s)^{2r}}\le\right]^{\frac{1}{2}}\le\|f\|_{SW_s^r}\sum_{k=q}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{2kr}}\sum_{2^k\le n_1\cdots n_s\le 2^{k+1}}1\right]^{\frac{1}{2}}<<\|f\|_{SW_s^r}\sum_{k=q}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{2kr}}\cdot 2^k\cdot k^{s-1}\right]^{\frac{1}{2}}\asymp$$

$$\asymp\frac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{q\left(r-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Сонымен, $I_2<<\dfrac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{q\left(r-\frac{1}{2}\right)}}$. (2)

Олай болса, (1) және (2) бойынша

$$\sup_{f:\|f\|_{SW_s^r}}\left\|f(x)-\sum_{n\in V_q}\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,x)})e^{2\pi i(n,x)}\right\|_{L^\infty(0,1)^s}<<I_1+I_2=\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}+\frac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{q\left(r-\frac{1}{2}\right)}}.<<\frac{q^{s-1}}{2^{q(r-1)}}$$

Теорема дәлелденді.

Әдебиет

1 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем.сб.-1990.-Т. 181, №4.-С. 490-505.

2 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций //Докл.АН СССР.-1963.-Т.148, №5.-С.1042-1045.

3 Темиргалиев Н. Классы $U_S(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы//Докл.РАН.-2003.-Т.393, №5.-С.605-608.

4 Шерниязов К.Е. Оптимальное восстановление в метрике L^2 решений уравнения теплопроводности с начальными температурами из классов Соболева// I-съезд математиков Казахстана:Тезисы докл.-Шымкент, 1996.

Резюме

В данной научной работе восстановлена функция на классе Соболева SW_s^r с применением произведения функционалов в норме $L^\infty(0,1)^s$.

Summary

In the given scientific work it is restored function on class Soboleva with by application products functional in norm $L^\infty(0,1)^s$.