УДК 517.91

О ФУРЬЕ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ш.Шалданбаев, Г.Шетенова
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Введение

1.Постановка задачи. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на сегменте [0,1], т.е. $f(x) \in C[0,1]$. Рассмотрим задачу Коши для простейшего уравнения Штурма-Лиувилля:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \tag{1.1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{1.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Регулярным решением краевой задачи (1.1)-(1.2) называется дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнение (1.1) и краевым условиям (1.2).

Для любой непрерывной функции $f(x)$ существует единственное регулярное решение краевой задачи (1.1)-(1.2), которое задается формулой:

$$y(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt. \tag{1.3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $y(x)$ называется сильным решением задачи Коши (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений $\{y_n(x)\}$ задач Коши (1.1)-(1.2) такая, что $Ly_n \to f(x), y_n(x) \to y(x)$ в пространстве $L^2(0,1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Задача Коши (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого $f(x) \in L^2(0,1)$ существует единственное сильное решение.

Задача Коши (1.1)-(1.2) сильно разрешима и решение дается той же формулой (1.3), но для практической цели это формула мало пригодна, поскольку зачастую интеграл окажется не вычисляемым в квадратуре, поэтому применяются приближенные методы вычисления определенных интегралов. Но эти методы также наталкиваются на препятствия, дело в том, что в нашей ситуации верхняя граница интеграла является переменной величиной и это обстоятельство создает дополнительные трудности. Классический метод Фурье - разложение решения по собственным функциям также неприменим из-за отсутствия последних, ибо хорошо известна вольтерровость задачи Коши.

ПРОБЛЕМА. Возможно ли разложение решения задачи Коши (1.1)-(1.2) в ряд Фурье по некоторой ортонормированной системе так, чтобы частичные суммы этого ряда наилучшим образом приближали это решение среди всех конечномерных приближений.

2. Вспомогательные предложения

Пусть $H = L^2(0,1)$ - пространство Гильберта, A - линейный вполне непрерывный оператор, определенный на этом пространстве, а S - инволюция, определенная формулой:

$$Su(x) = u(1-x). \tag{2.1}$$

Нетрудно установить, что оператор S является унитарным и самосопряженным, поэтому имеет место равенство

$$S^2 = I. \tag{2.2}$$

ЛЕММА 2.1. Если вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию

$$SA = A^*S, \tag{2.3}$$

то оператор SA является вполне непрерывным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, имеет место равенство $(SA)^* = A^*S^* = A^*S = SA$. Во-вторых, произведение ограниченного и компактного оператора компактно.

ЛЕММА 2.2. Если A - оператор интегрирования, определенный формулой

$$Ay(x) = \int_0^x y(t)dt \tag{2.4}$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$, то имеет место формула

$$SA = A^*S$$

где S - оператор, определенный формулой (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.а)

$(Ay,z) = \int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \overline{z(t)}dt = -\int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot d\int_t^1 \bar{z}(\xi)d\xi = -\int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi \Big|_0^1 +$
$\int_0^1 y(\xi) \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi dt = (y, A^*z), \Rightarrow$

$$A^*z(x) = \int_x^1 z(t)dt;$$

б) $SAy(x) = \int_0^{1-x} y(t)dt = \begin{vmatrix} 1-t=\xi \\ -dt = d\xi \end{vmatrix} = -\int_1^x y(1-\xi)d\xi = \int_x^1 y(1-\xi)d\xi =$

$$\int_x^1 Sy(\xi)d\xi = A^*S.$$

ЛЕММА 2.3. Если A - оператор интегрирования, определенный формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \tag{2.4}$$

то имеет место формула

$$A^2y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \tag{2.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A^2f(x) = A(Af(x)) = A\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \int_0^t f(\xi)d\xi dt =$
$t\int_0^t f(\xi)d\xi \Big|_0^x - \int_0^x f(t)\cdot tdt = x\int_0^x f(\xi)d\xi - \int_0^x f(t)tdt = \int_0^x (x-t)f(tdt).$

ЛЕММА 2.4. Если A - оператор интегрирования, определенный формулой (2.4), то имеет место формула

$$SA^2 = (A^2)^*S, \tag{2.6}$$

где S - инволюция, определенная формулой (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $SA^2 = SAA = A^*SA = A^*A^*S = (A^2)^*S$

ЛЕММА 2.5. Если A - вольтерровый оператор, S - унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S,\ S = S^*,\ N(A) = \{0\}, \tag{2.7}$$

то операторное уравнение

$$Au = f \tag{2.8}$$

имеет в пространстве H единственное решение вида

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j, \tag{2.9}$$

где λ_j - собственное значение оператора SA, а φ_j - собственные векторы этого оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы оператор A компактный, а в силу условий $SA = A^*S,\ S = S^*$ оператор SA - самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта для любого вектора u пространства H имеет место разложение:

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty}(SAu, \varphi_j)\varphi_j + \varphi_0$$

где $\varphi_0 \in N(SA)$. В нашем случае $N(SA) = \{0\}$, поэтому

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty}(SAu,\varphi_j)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,\varphi_j)\varphi_j, \Rightarrow (SAu,\varphi_j) = \lambda_j(u,\varphi_j), (u,\varphi_j) = \frac{(SAu,\varphi_j)}{\lambda_j}.$$

Если $(u,\varphi_j)=0$, то $SAu=0$, $\lambda u=0$, следовательно, система $\{\varphi_j\}$ является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем:

$$u=\sum_{j=1}^{\infty}(u,\varphi_j)\varphi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(SAu,\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j.$$

3. Основные результаты

Пусть оператор A определен формулой

$$Af(x)=\int_0^x f(t)dt, \tag{3.1}$$

тогда в силу формул (1.3), (2.5) решение задачи Коши (1.1)-(1.2) имеет вид:

$$y(x)=A^2f(x). \tag{3.2}$$

Действуя на обе части этого равенства оператором S, имеем:

$$Sy(x)=SA^2f(x). \tag{3.3}$$

В силу леммы 2.4 оператор SA^2 самосопряжен, а в силу формулы (1.3) оператор SA^2 компактен. Если $A^2f=0$, то $f=0$, в самом деле, в этом случае

$$\int_0^x(x-t)f(t)dt=0.$$

Дважды продифференцировав это равенство и воспользовавшись теоремой Лебега [1], получим $f(x)=0$ почти всюду. В силу теоремы Гильберта-Шмидта имеет место разложение

$$SA^2f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(SA^2f,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f,\varphi_n)\varphi_n,$$

где $SA^2\varphi_n=\lambda_n\varphi_n, n=1,2,\dots$ следовательно, в силу формул 2.8, 2.9 решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\lambda_n\cdot S\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\lambda_n\varphi_n(1-x). \tag{3.4}$$

Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Задача Коши

$$Ly=y''(x)=f(x), x\in(0,1) \tag{3.5}$$

$$y(0)=y'(0)=0. \tag{3.6}$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(0,1)$ и это сильное решение имеет вид:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\lambda_n\varphi_n(1-x), \tag{3.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $L^2(0,1)$.

$$SA^2\varphi_n=\lambda_n\varphi_n, \tag{3.8}$$

$$A^2y(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt. \tag{3.9}$$

Литература

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа.- М.: Наука, 1980.

Қорытынды

Бұл еңбекте Штурм-Лиувилл есебіне арналған Коши есебінің шешімінің Фурье кейпі табылды. Мұндай кейіп бұрын-сонды әдебиетте кездеспеген және ол Эрвин Шмидт қатарының жаңа үлгісі болып саналады.

Summary

In persisting work is found Furie presentation of the decision of the problem Koshi for equation of the Shturm-Liuvillya. Such presentation in the current literature earlier did not meet. And this is a decomposition of the type Shmidta.