УДК 517.91

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ш.Шалданбаев, А.А.Шалданбаева
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Введение

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1.1}$$

где A - вполне непрерывный оператор, а f и u - элементы пространства H. Если оператор A взаимно однозначно отображает пространства H на свою область значения $R(A) \subset H$, то существует обратный оператор A^{-1}, отображающий множества $R(A)$ в пространства H, который является неограниченным оператором. В этом случае уравнение (1.1) имеет единственное решение u для любой правой части f из $R(A)$, которое имеет вид:

$$u = A^{-1}f \tag{1.2}$$

но, к сожалению, из-за неограниченности обратного оператора A^{-1}, это решение неустойчиво, то есть малые отклонения правой части от истинного значения могут привести к большим отклонениям от искомого истинного решения. На практике, как правило, правая часть бывает известной лишь приближенно, поэтому возникает проблема поиска устойчивого алгоритма решения уравнения (1.1). Впервые задачи такого рода начал рассматривать Тихонов А.Н. [1], оказалось, что многие задачи геофизики, сейсморазведки относятся именно к этому классу задач. Ярким представителем этого класса задач является обратная задача Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ задачу Коши для уравнения Штурма-Лиувилля:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1)$$
$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{1.3}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \tag{1.4}$$

Суть обратной задачи Коши состоит в нахождении правой части f по известному решению $y(x)$, то есть сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = y(x). \tag{1.5}$$

2. Вспомогательные предложения

В этом разделе мы докажем две леммы, которые могут иметь и самостоятельное значение и они подсказаны нам теоремой Эрвина Шмидта о разложении произвольного компактного оператора в ряд по собственным функциям «модуля» оператора [2].

ЛЕММА 2.1. Если A - вольтерровый оператор, S - унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S,\ S = S^*,\ N(A) = \{0\} \tag{2.1}$$

то операторное уравнение

$$Au = f \tag{2.2}$$

имеет в пространстве H единственное решение вида:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \tag{2.3}$$

где λ_n - собственное значение оператора SA, а φ_n - собственные векторы этого оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы оператор A компактный, а в силу условий $SA = A^*S$, $S = S^*$ оператор SA - самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта [3] для любого вектора u пространства H имеет место разложение

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty}(SAu,\varphi_n)\varphi_n + \varphi_0,$$

где $\varphi_0 \in N(SA)$. В нашем случае $N(SA) = \{0\}$, поэтому

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty}(SAu,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(u,\varphi_n)\varphi_n, \Rightarrow (SAu,\varphi_n) = \lambda_n(u,\varphi_n), (u,\varphi_n) = \frac{(SAu,\varphi_n)}{\lambda_n}.$$

Если $(u,\varphi_n) = 0$, то $SAu = 0$, $\lambda u = 0$, следовательно, система $\{\varphi_n\}$ является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(SAu,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n.$$

ЛЕММА 2.2. (а) Если A - вольтерровый оператор, S - унитарный оператор, действующие в гильбертовом пространстве H и удовлетворяющие условию

$$SA = A^*S,\ S = S^*,\ N(A) = \{0\}, \tag{2.1}$$

то операторное уравнение

$$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf \tag{2.4}$$

для любого вещественного числа α, отличного от нуля, и правой части $f \in H$ имеет единственное решение вида:

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha}\varphi_n, \tag{2.5}$$

где $SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, n = 1,2, \ldots$

(б) для любого элемента $f \in R(A)$ имеет место оценка

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha|\cdot\|u\|, f = Au, \tag{2.6}$$

которая показывает скорость приближения элемента Au_α к f при $\alpha \to 0$;

(в) если $f \in R(A)$ и $\alpha \to 0$, то величина $\|u_\alpha - u\|$ стремится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Оператор SA вполне непрерывен и самосопряжен, поэтому все его собственные значения вещественны. По альтернативе Фредгольма, любое комплексное число является либо собственным значением вполне непрерывного оператора, либо принадлежит к резольвентному множеству, стало быть, оператор $SA - i\alpha I$ ограниченно обратим при любом вещественном значении $\alpha \neq 0$. Следовательно, уравнение

$$(SA - i\alpha I)u_\alpha = Sf$$

разрешимо при любом вещественном $\alpha = 0$, т.е. имеет место формула: $u_\alpha = (SA - i\alpha I)^{-1}Sf$.

Найдем Фурье представление этого решения:

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}(u_\alpha,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}((SA - i\alpha I)^{-1}Sf,\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(Sf,(SA + i\alpha)^{-1}\varphi_n)\varphi_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)\varphi_n}{\lambda_n + i\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)\varphi_n}{\lambda_n + i\alpha}.$$

Оценим норму u_α в пространстве H:

$$\|u_\alpha\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(Sf,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} < \frac{1}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}|(f,S\varphi_n)|^2 \ll \frac{\|f\|^2}{\alpha^2},\ \alpha = 0;$$

б) Из условия $f \in R(A)$ следует, что существует такой элемент u пространства H, что $f = Au$. Оператор A ограничен и $A\varphi_n = \lambda_n S\varphi_n$, поэтому

$$Au_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha}A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha}S\varphi_n;$$

$$\|Au_\alpha - f\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha}\lambda_n S\varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty}(f,S\varphi_n)S\varphi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_n + i\alpha} - 1\right|^2 |(f,S\varphi_n)|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^2}{\lambda_n^2+\alpha^2}|(f,S\varphi_n)|^2 \ll \alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(f,S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(Au,S\varphi_n)|}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(SAu,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2}$$

$$\ll \alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(u,SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2\cdot\|u\|^2;$$

в) Оценим норму $\|u_\alpha - u\|$ в пространстве H:

$$\|u_\alpha - u\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha}\varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n + i\alpha} - \frac{1}{\lambda_n}\right)(f,S\varphi_n)\varphi_n\right\|^2 =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\lambda_n^2(\lambda_n^2+\alpha^2)}|(f,S\varphi_n)|^2 = \alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(Au,S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2(\lambda_n^2+\alpha^2)} = \alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(u,SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2(\lambda_n^2+\alpha^2)} = \alpha^2\cdot$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(u,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2+\alpha^2} = \alpha^2\sum_{n=1}^{N}\frac{|(u,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2+\alpha^2} + \sum_{N+1}^{+\infty}\frac{|(u,\varphi_n)|^2\alpha^2}{\lambda_n^2+\alpha^2} \ll \alpha^2\sum_{n=0}^{N}\frac{|(u,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2+\alpha^2} + \sum_{N+1}^{\infty}|(u,\varphi_n)|^2.$$

Из условия $f \in R(A)$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|(u,\varphi_n)|^2 < +\infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $\sum_{N-1}^{\infty}|(u,\varphi_n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. При фиксированном $N(\varepsilon)$ найдем число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $0 \ll \alpha < \delta(\varepsilon)$ имеет место

$$\alpha^2\sum_{n=1}^{N}\frac{|(u,\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2+\alpha^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

неравенство. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $0 \ll \alpha < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство $\|u_\alpha - u\| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если u является элементом функционального пространства, иначе говоря, функцией, то быстрота сходимости к нулю величины $\sum_{N+1}^{\infty}|(u,\varphi_n)|^2$ зависит от гладкости функции $u(x)$

3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 3.1. (а) Если $f(x) \in W_2^2(0,1)$, то интегральное уравнение

$$Au(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt = f(x) \tag{3.1}$$

имеет единственное решение вида:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,S\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n, \tag{3.2}$$

где $S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x), SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$;

(б) для любого $f(x) \in W_2^2(0,1)$ имеет место оценка:

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha|\cdot\|u\|, f = Au,$$

где $u_\alpha(x)$ является решением уравнения

$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf, \alpha$ –вещественная величина;

(в) если $f(x) \in W_2^2(0,1)$, то $\lim_{\alpha\to 0}\|u_\alpha - u\| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Au = 0$, то $\int_0^x (x-t)u(t)dt = 0$, тогда из теоремы Лебега [3] следует, что $u(x) = 0$ почти всюду в $(0,1)$, следовательно, обратный оператор A^{-1} существует;

Ядро интегрального оператора (3.1) имеет вид $A(x,t) = (x-t)\cdot\theta(x-t)$, поэтому ограничен и принадлежит классу Гильберта-Шмидта. Следовательно, оператор A вполне непрерывен. Вольтерровость оператора A является следствием теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Проверка выполнения условий лемм 2.1, 2.2 не составляет труда.

Литература

1 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1979. – 288с.
2 Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в спектральную теорию несамосопряженных операторов.- М.: Наука, 1965. – 447с.
3 Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980. – 494с.

Қорытынды

Бұл еңбекте Штурм-Лиувилл есебіне арналған Коши есебіне кері есеп шешілді. Коши есебінің вольтерлі екені белгілі, сондықтан оған кері есеп жайсыз есептер қатарына жатады. Біз есепті шешудің нақты алгоритмін таптық.

Summary

In persisting work is solved inverse problem Koshi for equation of the Shturm-Liuvillya. The known that problem Koshi volterro. so its inverse problem pertains to count;calculate;list incorrect problems. We have found the concrete algorithm of this problem.