УДК 517.91

О ПРИЗНАКАХ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ В СУЩЕСТВЕННОМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ш.Шалданбаев, А.Жантасова
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Введение

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Плотно определенный оператор A в гильбертовом пространстве H называется симметрическим, если $A \subset A^*$, то есть если $D(A) \subset D(A^*)$ и $A\varphi = A^*\varphi$ для всех $\varphi \in D(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, то есть тогда и только тогда, когда A симметричен и $D(A) = D(A^*)$.

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, поскольку $D(A) \subset D(A^*)$, а значит, область $D(A^*)$ плотно в H. Если A симметричен, то A^* - замкнутое расширение A. Поэтому наименьшее замкнутое расширение A^{**} оператора A должно содержаться в A^*, итак, для симметрического оператора имеем:

$$A \subset A^{**} \subset A^*.$$

Для замкнутого симметрического оператора имеем:

$$A = A^{**} \subset A^*,$$

а для самосопряженного оператора:

$$A = A^{**} = A^*.$$

Отсюда видно, что замкнутый симметрический оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда A^* симметричен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Симметрический оператор A называется в существенном самосопряженным, если его замыкание $\overline{A}$ самосопряжено. Если A замкнут, то подмножество $D \subset D(A)$ называется существенной областью определения оператора A, если замыкание сужения оператора A на D совпадает с A.

Если A в существенном самосопряжен, то он имет одно и только одно самосопряженное расширение. Действительно, если предположить, что B - самосопряженное расширение A, то B замкнут и из $B \supset A$ получаем $B \supset A^{**}$. Отсюда $B = B^* \subset \left(A^{**}\right)^* = A^{**}$. Поэтому $B = A^{**}$.

Справедливо и обратное утверждение, а именно, если оператор A имеет одно и только одно самосопряженное расширение, то A - самосопряжен в существенном.

Отметим, что симметрический оператор может иметь много самосопряженных расширений или совсем их не иметь.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$ операторов Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ - произвольные комплексные числа.

Спрашивается, при каких условиях на коэффициенты a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ эти операторы окажутся самосопряженными в существенном?

В связи с поставленной задачей отметим следующие известные результаты.

ТЕОРЕМА 1.1 [1]. Если коэффициенты a_{ij} граничных условий действительные числа, то задача Штурма-Лиувилля (или оператор Штурма-Лиувилля) самосопряжена, тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\Delta_{12} = \Delta_{34}, \tag{1.3}$$

где Δ_{ij} - миноры, составленные из i - го и j - го столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

составленной из коэффициентов граничного условия (1.2).

Если коэффициенты a_{ij} комплекснозначны, то критерии самосопряженности имеют следующий вид [2].

ТЕОРЕМА 1.2 [2]. Пусть $Ly = -(py')' + qy$, где $p(x)$ - положительна, производная $p'(x)$ абсолютно непрерывна на интервале $[0,1]$, а функция $q(x)$ - непрерывна и действительна. Пусть

$$U_y = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Формы U самосопряжены тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{m}_{11}m_{12} - \overline{m}_{12}m_{11}}{p(0)} = \dfrac{\overline{n}_{11}n_{12} - \overline{n}_{12}n_{11}}{p(1)}, \\ \dfrac{\overline{m}_{21}m_{22} - m_{21}\overline{m}_{22}}{p(0)} = \dfrac{\overline{n}_{21}n_{22} - n_{21}\overline{n}_{22}}{p(1)}, \\ \dfrac{\overline{m}_{11}m_{22} - m_{21}\overline{m}_{12}}{p(0)} = \dfrac{\overline{n}_{11}n_{22} - n_{21}\overline{n}_{12}}{p(1)}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отметим, что если коэффициенты m_{ij}, n_{ij} - действительны, то требуется только последнее условие.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Для вывода основного результата настоящей работы были использованы следующие, легко доказываемые леммы.

ЛЕММА 2.1. Если $f(x)$ непрерывна в сегменте $[0,1]$ и

$$Ly = -y''(x) = f(x), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

то при

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$$

существует обратный оператор L^{-1}, который имеет вид:

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int\limits_0^x \frac{-\Delta_{13}xt - (\Delta_{12} + \Delta_{32})x + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})t + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)dt +$$

$$\int\limits_x^1 \frac{-\Delta_{13}xt - (\Delta_{32} + \Delta_{34})t + (\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34})x + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)dt. \tag{2.3}$$

ЛЕММА 2.2. Интегральный оператор

$$K^*g(x) = \int\limits_0^1 K^*(x,t)g(t)dt \tag{2.4}$$

является сопряженным оператором к интегральному оператору

$$Kf(x) = \int\limits_0^1 K(x,t)f(t)dt$$

в пространстве $L^2(0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$K^*(x,t) = \overline{K(t,x)}. \tag{2.5}$$

Следует отметить, что ядро $K(x,t)$ из класса Гильберта-Шмидта.

ЛЕММА 2.3. Если $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$, существует обратный оператор L^{-1} к оператору Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2), сопряженный к которому имеет вид:

$$\left(L^{-1}\right)^* g(x) = \int\limits_0^1 G^*(x,t)g(t)dt, \tag{2.6}$$

где

$$G^*(x,t) = \begin{cases} \dfrac{-\overline{\Delta}_{13}xt - (\Delta_{34} + \Delta_{32})x + \left(\overline{\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34}}\right)t + \overline{\Delta}_{32} + \overline{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, & 0 \le t \le x; \\ \dfrac{-\overline{\Delta}_{13}xt - \left(\overline{\Delta_{12} + \Delta_{32}}\right)t + \left(\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14}}\right) + x + \overline{\Delta}_{32} + \overline{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, & x \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

ЛЕММА 2.4. Если оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) является обратимым в пространстве $L^2(0,1)$, то сопряженный оператор L^* имеет следующий вид:

$$L^*z = -z''(x), \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_{13}y(0) - \left(\overline{\Delta_{34} + \Delta_{32}}\right)y'(0) - \overline{\Delta}_{13}y(1) - \left(\overline{\Delta_{12} + \Delta_{14}}\right)y'(1) = 0, \\ \left(\overline{\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34}}\right)y(0) - \left(\overline{\Delta_{32} + \Delta_{42}}\right)y'(0) + \left(\overline{\Delta}_{12} + \overline{\Delta}_{32}\right)y(1) + \left(\overline{\Delta}_{12} + \overline{\Delta}_{24}\right)y'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

ЛЕММА 2.5. Если $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$, то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) симметричен тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},$$
$$\frac{\Delta_{12}+\Delta_{32}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{34}+\overline{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},\tag{2.10}$$
$$\frac{\Delta_{32}+\Delta_{42}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{32}+\overline{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}}.$$

ЛЕММА 2.6. Если $\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}\neq 0$, то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) обратим, замыкаем и имеет место формула:

$$\overline{L^{-1}}=\left(\overline{L}\right)^{-1}.\tag{2.11}$$

ЛЕММА 2.7. Если $A\subset A'$ и $R(A)=H$, то $A=A'$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 3.1. Если

а) $\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}\neq 0,$ (3.1)

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},$$
$$\text{б)}\ \frac{\Delta_{12}+\Delta_{32}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{34}+\overline{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},\tag{3.2}$$
$$\frac{\Delta_{32}+\Delta_{42}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}=\frac{\overline{\Delta}_{32}+\overline{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},$$

то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) самосопряжен в существенном в пространстве $L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий (3.1), (3.2) и леммы 2.5 оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) симметричен, а в силу леммы (2.6) он замыкаем. Замыкание любого симметрического оператора будет симметрическим оператором.

Таким образом, замыкание оператора Штурма-Лиувилля L является симметрическим оператором, область значений которого $R(\overline{L})$ совпадает со всем пространством $H=L^2(0,1)$ (см.2.11).

Тогда в силу леммы 2.7 имеет место равенство $\left(\overline{L}\right)^*=\overline{L}$, т.е. оператор $\overline{L}$ самосопряжен, что и утверждалось теоремой 3.1.

Литература

1 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков, 1939. – 717с.
2 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1958. -474с.

Қорытынды

Бұл еңбекте $Ly=-y''(x)$ Штурм-Лиувилл операторының тегі жалқы болуының бір белгісі табылды. Мұндай белгі бұрын-сонды әдебиетте кездеспеген.

Summary

In persisting work is received one sufficient sign самосопряженности in essential operator of the Shturm-Liuvillya: $Ly=-y''(x)$ with the general linear independent marginal condition.