УДК 517.91

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ ПРИЗНАКЕ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ш. Шалданбаев, А.Мергенбаева
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Многие решения математической задачи приводят к определению собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд (или интеграл) по собственным функциям. Так, например, к такого рода вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего данным начальным и краевым условиям. Поэтому дифференциальные операторы привлекали, и привлекают большое внимание и имеется много работ, им посвященных.

Несмотря на фундаментальные результаты, полученные до настоящего времени, проблему спектрального разложения дифференциальных операторов еще нельзя считать исчерпанной. Здесь в первую очередь следует указать на задачу определения кратности спектра дифференциального оператора в зависимости от свойств его коэффициентов [1].

Пусть $H = L^2(0,1)$ - пространство Гильберта, L - оператор Штурма-Лиувилля, определенный условиями:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = zy(x), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если для некоторого собственного значения λ_0 этого оператора соответствуют две собственные функции, то такое собственное значение называется кратным. Спрашивается, какими должны быть коэффициенты краевого условия (1.2), чтобы оператор (1.1)-(1.2) имел хотя бы одно кратное собственное значение.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ спектральную задачу

$$Ly = y'(1-x) = \lambda y(x), x \in (0,1) \tag{2.1}$$

$$\alpha y(0) + \beta y(1) = 0, \tag{2.2}$$

где α, β - произвольные комплексные числа, λ - спектральный параметр. Сначала найдем общее решение уравнения (2.1) и изучим его свойства. Имеет место следующая лемма [2].

ЛЕММА 2.1.

(а) Пространство решений уравнения (2.1) одномерно;

(б) Общее решение уравнения (2.1) имеет следующий вид:

$$y(x,\lambda) = C\left[\cos\lambda\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \sin\lambda\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right], C - const. \tag{2.3}$$

(в) Для любого нетривиального решения уравнения (2.1) имеет место формула

$$y(1-x,\lambda) = y(x,-\lambda). \tag{2.4}$$

(г) Если $y(x,\lambda)$ есть решение уравнения (2.1) и

$z(x,\lambda) = y(1-x,\lambda)$, то

$$z'(1-x) = -\lambda z(x). \tag{2.5}$$

(д) Если $\lambda \neq 0$, то пара $\varphi(x,\lambda), \varphi(x,-\lambda)$ образует базис решений уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x), x \in (0,1), \tag{2.6}$$

где

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\lambda\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \sin\lambda\left(x-\tfrac{1}{2}\right), \tag{2.7}$$

есть решение уравнения (2.1). Вронскиан этой пары вычисляется по формуле

$$W[\varphi(x,\lambda),\varphi(x,-\lambda)] = -2\lambda; \tag{2.8}$$

(e) Если $\psi(x,\lambda) = \varphi(x,-\lambda)$, то пара

$$z_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) - \psi(x,\lambda), z_2(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda) \tag{2.9}$$

образует базис в пространстве решений уравнения Штурма-Лиувилля (2.6), причем

$$\begin{aligned} &z_1(1-x,\lambda) = -z_1(x,\lambda);\ z_1(0) = -z_1(1),\ z'_1(0) = z'_1(1); \\ &z_2(1-x,\lambda) = z_2(x,\lambda);\ z_2(0) = z_2(1),\ z'_2(0) = -z'_2(1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Эта лемма играет ключевую роль во всех наших дальнейших исследованиях, одним из следствий этой леммы является следующая

ЛЕММА 2.2. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

имеет хотя бы одно кратное собственное значение, отличное от нуля, т.е. $\lambda_0 \neq 0$, то имеет место равенство

$$\Delta_{12} - \Delta_{34} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0, \tag{2.13}$$

где Δ_{ij} - минор, составленный из i - го и j - го столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

составленный из коэффициентов граничного условия (2.12).

С помощью другого базиса получена следующая лемма 2.3, которая уточняет предыдущую лемму 2.2.

ЛЕММА 2.3. Если оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) имеет хотя бы одно кратное собственное значение λ_0^2, отличное от нуля, то имеют место равенства

1) $\Delta_{12} - \Delta_{34} = 0;$
2) $\Delta_{14} + \Delta_{23} = 0;$
3) $\lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0.$ (2.15)

Предположим, что оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, тогда из равенств

$$\lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0,\ \lambda_1^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0$$

выводим, что $(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\Delta_{42} = 0, \Rightarrow \Delta_{42} = 0, \Delta_{13} = 0.$

Таким образом, имеет место следующая лемма 2.4.

ЛЕММА 2.4. Если оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, то имеют место равенства

1) $\Delta_{12} - \Delta_{34} = 0;$
2) $\Delta_{14} + \Delta_{23} = 0;$
3) $\Delta_{42} = \Delta_{13} = 0.$ (2.16)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) называется вырожденным, если ее спектр пуст или вся комплексная λ - плоскость.

ЛЕММА 2.5[3]. Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) вырожден тогда и только тогда, когда

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = 0. \tag{2.17}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 3.1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), x \in (0,1),$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \end{cases}$$

с линейно независимыми краевыми условиями, имеет не менее двух, отличных от нуля, кратных собственных значений, то граничное условие такого оператора имеет вид:

$$y(0) = ky(1), y'(0) = ky'(1), \tag{2.18}$$

где $k^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По нашему предположению, оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений. Известно, что спектр вырожденного оператора либо пуст, либо вся комплексная λ плоскость, причем все они являются однократными собственными значениями. Таким образом,

$$|\Delta_{14} + \Delta_{32}| = 0. \tag{2.19}$$

Следовательно, ни один из Δ_{14}, Δ_{32} не обращается в нуль.

Выводим граничное условие, удовлетворяющее всем этим требованиям. Из условия $\Delta_{14} \neq 0$ следует, что

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{14}y'(1) = -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), \\ a_{21}y(0) + a_{24}y'(1) = -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1). \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно $y(0)$, $y'(1)$ методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), & a_{14} \\ -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1), & a_{24} \end{vmatrix} = \Delta_{42}y'(0) + y(1)\Delta_{43};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1) \\ a_{21}, & -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1) \end{vmatrix} = \Delta_{21}y'(0) + y(1)\Delta_{31}.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$y(0) = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1),$$

$$y'(1) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{14}}y(1).$$

В нашей ситуации $\Delta_{42} = \Delta_{13} = 0$, поэтому

$$y(0) = \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1), y'(1) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0).$$

В силу пункта 1) леммы 2.3 имеет место равенство $\Delta_{12} = \Delta_{34}$, поэтому

$$\frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}} = k.$$

Следовательно, граничное условие примет вид:

$$y(0) = ky(1), y'(1) = ky'(0), \tag{2.20}$$

аналогично из условия $\Delta_{23} \neq 0$ выводим, что

$$y'(0) = ky'(1), y(1) = ky(0). \tag{2.21}$$

Сравнивая формулы (2.20) и (2.21), получим

$$y(0) = ky(1) = k^2(0), y'(1) = ky'(0) = k^2y'(1).$$

Если $k = 0$, то $y(0) = y'(0) = 0$, тогда по теореме единственности решения задачи Коши получим $y \equiv 0$, поскольку речь идет о нетривиальных решениях, то $k \neq 0$ и $k^2 = 1$.

Литература

1 Наймарк М.А. Линейные дифференциональные операторы.- М.: Наука, 1969. - 526с.

2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами // Математический журнал.- Алматы, 2004.- Т.4, №3. - С.41-48.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени //Известия АН РК, серия физ.-мат.- 2000. - С.29-34.

Қорытынды

Бұл еңбекте шекарарлық шарттары өзара тәуелсіз $Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x)$ Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің еселік болуының бір белгісі табылды.

Summary

In persisting work is received one necessary sign own importances of the operator of the Shurm-Liuvillya: $Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x)$ with the general linear independent marginal condition.