УДК 517.91

О ХАРАКТЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

А.Ш.Шалданбаев, Г.Болегенова
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Введение

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \tag{1.1}$$

$$y(0) = y'(1) + ay(1) = 0, \tag{1.2}$$

где a - вещественное число и λ - спектральный параметр.

Легко установить, что оператор (1.1)-(1.2) симметричен и если $a \neq -1$, то нормированные собственные векторы оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$ [1].

Собственные значения оператора (1.1)-(1.2) зависят от a и меняются при изменении a. Возникает вопрос, какова эта зависимость, в частности, не происходит ли столкновение или уплотнение собственных значений оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2).

Отметим, что такие задачи возникают при разделении переменных краевых задач для уравнений с частными производными.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Общее решение дифференциального уравнения

$$-y''(x) = \lambda y(x) \tag{2.1}$$

имеет вид:

$$y(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda} + B\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}},\ (при\ \lambda \neq 0), \tag{2.2}$$

где A, B- произвольные постоянные, зависящие, вообще говоря, от спектрального параметра λ. Подставив (2.2) в граничное условие (1.2), получим систему уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных A, B:

$$\begin{cases} y(x,\lambda)\big|_{x=0} = A = 0, \\ y'(1,\lambda) + ay(1,\lambda) = -\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda} + B\cos\sqrt{\lambda} + a\left[A\cos\sqrt{\lambda} + B\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right] = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\cos\sqrt{\lambda} + aB\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = B\left(\cos\sqrt{\lambda} + a\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0.$$

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) являются корнями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda} + a\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0\,. \tag{2.3}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что $a \succ 0$, тогда

$$\Delta(\lambda) = a\frac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} + tg\sqrt{\lambda}\right).$$

Если $\lambda = 0$, то $\Delta(0) = 1 + a \succ 1$, поэтому величина $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Если $\lambda = -\mu^2 \le 0$, то

$$\Delta(-\mu^2) = \frac{a\cos i\mu}{i\mu}\left[\frac{i\mu}{a} + ith\mu\right] = ach\mu\left[\frac{\mu}{a} + th\mu\right],\ th\mu = \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{e^{\mu} + e^{-\mu}},$$

$$\left[\frac{\mu}{a} + th\mu\right]' = \frac{1}{a} + \frac{1}{ch^2\mu} \succ \frac{1}{a} \succ 0\,.$$

$$\lim_{\mu\to-\infty}\left[\frac{\mu}{a} + th\mu\right] = -\infty\,,\ \lim_{\mu\to+\infty}\left[\frac{\mu}{a} + th\mu\right] = +\infty\,.$$

Следовательно, уравнение $F(\mu) = th\mu + \dfrac{\mu}{a}$ на числовой оси $(-\infty, +\infty)$ имеет единственный корень $\mu = 0$, тогда из $\lambda = -\mu^2$ имеем $\lambda = 0$. Поэтому в этом случае $(a \succ 0)$ отрицательные собственные значения отсутствуют, и все собственные значения (если есть) положительны $(a \succ 0 \Rightarrow \lambda_n \succ 0)$.

Если $\lambda = \mu^2 \succ 0$, то

$$\Delta(\lambda)\Big|_{\lambda=\mu^2} = \frac{a\cos\mu}{\mu}\left(tg\mu + \frac{\mu}{a}\right) = \frac{a\cos\mu}{\mu}\cdot F(\mu)\,. \tag{3.1}$$

Если $\cos\mu_0 = 0$, то из уравнения $\Delta(\mu_0^2) = 0$ имеем $\sin\mu_0 = 0$, тогда $1 = \sin^2\mu_0 + \cos^2\mu_0 = 0$, что невозможно. Таким образом, если $\Delta(\mu_0^2) = 0$, то $\cos\mu_0 \ne 0$, поэтому $F(\mu_0) = th\mu_0 + \dfrac{\mu_0}{a} = 0$. Обратно, если $F(\mu_0) = 0$ и $\mu_0 \ne 0$, то $\Delta(\mu_0^2) = 0$. Множество нулей функции $\Delta(\mu^2)$ совпадает с множеством, отличных от нуля, корней уравнения $F(\mu_0) = 0$, поэтому детально изучим свойства функции $F(\mu_0)$. Поскольку $\lambda = \mu_n^2$, то ограничимся изучением, лишь неотрицательных корней уравнения $F(\mu) = 0$. Функция $F(\mu) = th\mu + \dfrac{\mu}{a}$ положительна в тех интервалах, где $tg\mu \succ 0$, т.е. при $n\pi \prec \mu \prec n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n = 0,1,2,..$, поэтому в этих интервалах корни уравнения $F(\mu) = 0$ отсутствуют. Пусть $n\pi - \dfrac{\pi}{2} \prec \mu \prec n\pi$, $n = 1,2,..$, тогда

$$F\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty\,,\ F(n\pi) = \frac{n\pi}{a} \succ 0\,,\ n = 1,2,..$$

$$F'(\mu) = \frac{1}{\cos^2\mu} + \frac{1}{a} \succ \frac{1}{a} \succ 0\,.$$

Следовательно, функция монотонно возрастает в интервале $\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi\right)$, $n=1,2,..$ от $-\infty$ до $\frac{n\pi}{a}\succ 0$, и обращаясь в нуль лишь в одной точке μ_n. Таким образом, уравнение $F(\mu)=0$ имеет бесконечное множество положительных корней, расположенных в интервалах $\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi\right)$, $n=1,2,..$, т.е. имеет место неравенство

$$n\pi-\frac{\pi}{2}<\mu_n(a)<n\pi, n=1,2,... \tag{3.2}$$

Теперь изучим поведение корней $\mu_n(a)$, $n=1,2,...$ при изменении параметра a от 0 до $+\infty$. Из уравнения $F(\mu)=0$ имеем $tg\mu_n=-\frac{\mu_n}{a}$ $(n=1,2,...)$,

$$\mu_n=n\pi+arctg\left(-\frac{\mu_n}{a}\right)=n\pi-arctg\frac{\mu_n}{a},\ n=1,2,... \tag{3.3}$$

Тогда

1) $\lim\limits_{a\to+\infty}\mu_n(a)=n\pi-arctg0=n\pi$, $n=1,2,..$,

2) $\lim\limits_{a\to 0}\mu_n(a)=n\pi-\frac{\pi}{2}$, $n=1,2,...$

При изменении параметра a в пределах от 0 до $+\infty$ корни $\mu_n(a)$ не слипаются, что видно из неравенства

$$\mu_{n+1}(a)-\mu_n(a)=(n+1)\pi-arctg\frac{\mu_{n+1}(a)}{a}-n\pi+arctg\frac{\mu_n(a)}{a}=\pi+arctg\frac{\mu_n(a)}{a}-arctg\frac{\mu_{n+1}(a)}{a}\succ$$

$$\pi+0-\frac{\pi}{2}\succ\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\inf_{a\succ 0,m,n}|\mu_n(a)-\mu_m(a)|\geq\frac{\pi}{2},\ m,n=1,2,.... \tag{3.4}$$

По теореме о неявной функции корни $\mu_n(a)$ непрерывно дифференцируемо зависит от параметра a [2, с.95]. Продифференцировав уравнение $F(\mu)=0$ по параметру a, получим дифференциальное уравнение движения нулей $\mu_n(a)$, $n=1,2,..$ при изменении параметра a.

$$\frac{\dot{\mu}_n}{\cos^2\mu_n}+\frac{\dot{\mu}_n}{a}-\frac{\mu_n}{a^2}=0,\ n=1,2,..,$$

где $(\cdot)$- знак дифференцирования по параметру a. Преобразуем полученное дифференциальное уравнение, принимая во внимания исходное уравнение $F(\mu)=0$

$$\left(\frac{1}{\cos^2\mu}+\frac{1}{a}\right)\cdot\dot{\mu}(a)=\frac{\mu(a)}{a^2};$$

$$tg\mu_n=-\frac{\mu_n}{a},\ 1+tg^2\mu^n=1+\frac{\mu_n^2}{a^2},$$

$$\frac{1}{\cos^2\mu_n}=1+\frac{\mu_n^2}{a^2},\ \left(1+\frac{\mu_n^2}{a^2}+\frac{1}{a}\right)\cdot\dot{\mu}=\frac{\mu_n}{a^2},\ \left(a^2+a+\mu_n^2\right)\cdot\dot{\mu}_n=\mu_n,$$

$$\dot{\mu}_n = \frac{\mu_n}{a^2 + a + \mu_n^2} \succ 0\,, \ \ \forall a \succ 0\,. \tag{3.5}$$

Следовательно, при изменении параметра a в сегменте $[0, +\infty)$ функция $\mu_n(a)$ принимает все значения из сегмента $\left[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ монотонно возрастая от $n\pi - \frac{\pi}{2}$ до $n\pi$, $n = 1,2,..$ (рисунок 1).

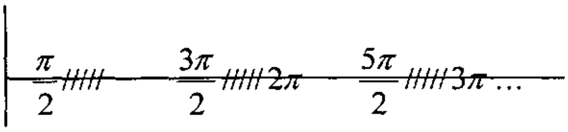

Рисунок 1

Оценим скорость стремления к своим граничным значениям корней $\mu_n(a)$, $n = 1,2,..$ при применении параметра a. По теореме Лагранжа [2, с.16] имеем:

$$F(\mu_n) - F(n\pi) = 0 - \frac{n\pi}{a} = F'(\xi)(\mu_n - n\pi) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\cos^2\xi}\right)(\mu_n - n\pi),$$

$$\mu_n - n\pi = \frac{-\dfrac{n\pi}{a}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\cos^2\xi}} = -\frac{n\pi}{1 + \dfrac{a}{\cos^2\xi}}, \ \ \mu_n(a) \prec \xi \prec n\pi,$$

$$\mu_n = n\pi - \frac{n\pi}{1 + \dfrac{a}{\cos^2\xi}}, \ \ \mu_n(a) \prec \xi \prec n\pi,$$

$$0 \prec n\pi - \mu_n = \frac{n\pi}{1 + \dfrac{a}{\cos^2\xi}} \prec \frac{n\pi}{1+a}, \ \ \forall a \succ 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.. $0 \prec 1 - \dfrac{\mu_n(a)}{n\pi} \prec \dfrac{1}{1+a}, \ \ 0 \prec a \prec +\infty.$

Теперь получим оценку для другой границы:

$$\mu_n(a) - \mu_n(0) = \dot{\mu}_n(\xi)\cdot a = \frac{\mu_n(\xi)\cdot a}{a^2 + a + \mu_n^2(\xi)} \prec \frac{a}{\mu_n(\xi)},$$

$$0 \prec \xi \prec a, \Rightarrow \mu_n(0) \prec \mu_n(\xi) \prec \mu_n(a), \Rightarrow \frac{1}{\mu_n(\xi)} \prec \frac{1}{\mu_n(0)},$$

$$0 \prec \mu_n(a) - \mu_n(0) \prec \frac{a}{\mu_n(0)} = \frac{a}{n\pi - \dfrac{\pi}{2}}, \ \ n = 1,2,..$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. $0 \prec \mu_n(a) - n\pi + \dfrac{\pi}{2} \prec \dfrac{2}{\pi}\cdot a \ \ (\textit{при} \, a \to 0).$

Нами доказана следующая теорема 3.1.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $a \geq 0$, то положительные нули функции

$$\Delta(\mu^2) = a\frac{\sin\mu}{\mu} + \cos\mu \tag{3.6}$$

локализованы в интервалах

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \le \mu_n(a) \prec n\pi, \quad n = 1,2,\dots \tag{3.7}$$

При изменении параметра a от 0 до $+\infty$ нули $\mu_n(a)$ монотонно возрастают от $n\pi - \frac{\pi}{2}$ до $n\pi$ /см. Рисунок 1/.

Имеют места равенства

$$1)\ \lim_{a\to+0} \mu_n(a) = n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$2)\ \lim_{a\to+\infty} \mu_n(a) = n\pi, \quad n = 1,2,\dots; \tag{3.8}$$

и неравенства

$$1)\ \mu_{n+1}(a) - \mu_n(a) \succ \frac{\pi}{2}, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$2)\ 0 \prec n\pi - \mu_n(a) \prec \frac{n\pi}{1+a}, \quad \forall a \ge 0 \quad (a \to +\infty);$$

$$3)\ 0 \prec \mu_n(a) - n\pi + \frac{\pi}{2} \prec \frac{a}{n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad (a \to +0). \tag{3.9}$$

Нули $\mu_n(a)$ являются решениями нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{\mu}_n(a) = \frac{\mu_n(a)}{a^2 + a + \mu_n^2(a)}, \quad n = 1,2,\dots \tag{3.10}$$

Интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ не содержит нулей функции $\Delta(\mu^2)$ при всех $a \ge 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. Если $a \ge 0$, то все собственные значения оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) положительны и удовлетворяют неравенства

$$(n\pi - \frac{\pi}{2})^2 \le \lambda_n(a) \prec (n\pi)^2, \forall a \gg 0, \ n = 1,2,\dots \tag{3.11}$$

При изменении параметра a от 0 до $+\infty$ собственные значения $\lambda_n(a)$ $n = 1,2,\dots$ монотонно возрастают от $(n\pi - \frac{\pi}{2})^2$ до $(n\pi)^2$.

Имеют места равенства

$$1)\ \lim_{a\to+0} \lambda_n(a) = (n\pi - \frac{\pi}{2})^2, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$2)\ \lim_{a\to+\infty} \lambda_n(a) = (n\pi)^2, \quad n = 1,2,\dots; \tag{3.12}$$

и неравенства

$$1)\ \lambda_{n+1}(a) - \lambda_n(a) \succ n\pi^2, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$2)\ 0 \prec (n\pi)^2 - \lambda_n(a) \prec \frac{2(n\pi)^2}{1+a}, \quad \forall a \ge 0 \quad (a \to +\infty);$$

$$3)\ 0 \prec \lambda_n(a) - (n\pi + \frac{\pi}{2})^2 \prec \frac{2an\pi}{n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad (a \to +0), \quad n = 1,2,\dots \tag{3.13}$$

Литература

1 Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. – Киев, 1972.
2 Араманович И.Г. и др. Математический анализ.- М.: Физматгиз, 1961. – 350с.

Қорытынды

Бұл еңбекте $Ly = -y''(x) = \lambda y(x),\ y(0) = y'(1) + ay(1) = 0$ Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің a параметріне тәуелділігі зерттелді.

Summary

In persisting work is studied motion of own importances of the operator of the Shurm-Liuvillya: $Ly = -y''(x) = \lambda y(x),\ y(0) = y'(1) + ay(1) = 0$ when change the parameter a in $[0, +\infty)$.