УДК 624. 215

ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ПЛИТ НА УПРУГОПОЛЗУЧЕМ ОСНОВАНИИ

Т.Ш.Ширинкулов, А.Д. Дасибеков, К.Т. Ширинкулов, Т.Ш. Абильмаженов
ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент,
СамГАСИ, г. Самарканд

В настоящей работе, исходя из наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1] и применяя гипотезу Кирхгоффа, получены интегро-дифференциальные уравнения для изгиба составной упруго-ползучей плиты на упруго-ползучем Винклеровом основании. Решение задачи сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера. Вопросы, связанные с напряженно-деформированным состоянием упругоползучих плит на упругоползучем основании, рассмотрены в работах [2-5].

Пусть многослойная плита находится под действием внешних заданных нагрузок. Принимаем, что элементы плиты испытывают только изгибающие и крутящие моменты $M_{ij}(t)$, коэффициенты Пуассона слоев считаем не зависящими от времени, т.е. $\nu\ (t) = \nu_{0i} = const$.

Тогда зависимости между компонентами деформации напряжений имеют вид [1, 6]:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{E(t)}\left[(1+\upsilon)\sigma_{ij}(t) - \nu\sigma(t)\delta_{ij}\right] + \frac{1}{E(t)}\int_{\upsilon}^{t} K_i(t,\tau)\left[(1+\nu)\sigma_{ij}(\tau) - \nu\sigma(\tau)\delta_{ij}\right]\alpha\tau \quad (i,j=1,2) \quad (1)$$

δ_{ij} -символ Кронекера; $\sigma(t)$ - сумма нормальных напряжений;

$E(t)$ - модуль упругости бетона;

$$K(t,\tau) = -E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right] = -E(t)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau};$$
$$C(t,\tau) = \varphi(\tau)\{1-\exp[-\gamma(t-\tau)]\};$$
$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \quad (2)$$

здесь C_o, A_1, γ константы материала.

τ_1 - время после укладки, начиная с которого о бетоне можно говорить как наследственно-упругом теле.

Обозначим через σ_0 величину $E(t)\varepsilon_i$, это есть мгновенное напряжение, соответствующее данной деформации $\varepsilon(t)$ по закону Гука при том значении модуля упругости, которое он принимает в данный момент.

Уравнение (1) можно переписать в следующем операторном виде:

$$\varepsilon_{ij}(t)E(t) = (1+K^*)\left[(1+\nu)\sigma_{ij}(t) - \nu\sigma_{(t)}\delta_{ij}\right], \quad (3)$$

где $K(t,\tau)$ - ядро ползучести.

Напряженно-деформированное состояние деформируемых тел представляется в виде:

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\bar{\mu}\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$\bar{\lambda} = \frac{E^*}{E}\lambda$: $\bar{\mu} = \mu\frac{E^*}{E}$: $E^* = E(1-R^*)$: $R(t,\tau)$ - резольвента ядра $K(t,\tau)$,

λ, μ - коэффициенты Ламе.

Рассматривается НДС многослойной пластинки, соединенных слоями, которые осуществлены с помощью анкеров (заполнителей).

Поперечные связи считаем абсолютно жесткими, т.е. все слои имеют один и тот же прогиб $W(x,y,t)$.

Следуя А.Р.Ржаницыну [7], выражения для определения разности продольных перемещений Δu_i и Δv_i по обе стороны разделяющей поверхности i-го заполнителя принимаем в виде:

$$\Delta u_i = C_i \frac{\partial w}{\partial x} + u^{i+1} - u^i, \quad \Delta v_i = C_i \frac{\partial w}{\partial y} + v^{i+1} - v^i, \tag{5}$$

где u^i, v^i - продольные перемещения точек срединной поверхности i-го слоя; $C_i = \alpha_i + \beta_2$ - расстояние между средними поверхностями слоев, лежащих по обе стороны i-го заполнителя; материал заполнителей считаем изотропным.

Связь между Δu_i и Δv_i и соответствующими сдвиговыми напряжениями в i-ом заполнителе, согласно [7-9], принимаем в виде

$$\tau_x^i = \varepsilon_i \Delta u^i, \quad \tau_y^i = \varepsilon_i \Delta v^i, \tag{6}$$

ε_i - коэффициент жесткости связей сдвига.

Согласно гипотезе прямых нормалей, деформация пластинки в момент t будет

$$\varepsilon_{ij}(t) = \chi_{ij}(t) Z,$$

χ_{ij} - кривизна нейтрального слоя i - ой пластинки.

Усилия связаны с напряжениями следующими соотношениями:

$$M_{ij}(t) = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}(t) z dz .$$

На основании соотношения (3), (4) будем иметь:

$$M_{ij}(t) = D_i(t)\left[(1-\nu_i)\chi_{ij}^i + \nu_i \chi_i^i(t)\right] - \int_{\tau_1}^{t} D_i(\tau) R_i(t,\tau)\left[(1-\nu_i)\chi_{ij}^i(t) + \nu_i \chi_{ij}(\tau)\right] d\tau, \tag{7}$$

$$D_i(t) = \frac{E_i(t) h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}: \quad \chi_{ij}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y^i(t) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{iy}^i = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8}$$

Уравнение (7) выражает зависимости между компонентами внутренних усилий и кривизны при изгибе i-ой пластинки.

Уравнение равновесия элемента упруго-ползучей пластинки, лежащей на упруго-ползучем основании, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xa}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = q(x,y,t) - P(x,y,t) + \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{\partial \tau_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y^i}{\partial y} \right), \tag{9}$$

где

$$M_x(t) = \sum_{i=1}^{n} M_x^i(t), \quad M_y(t) = \sum_{i=1}^{n} M_y^i(t), \quad M_{xr}(t) = \sum_{i=1}^{n} M_{xy}^i, \tag{10}$$

$$q(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x,y,t),$$

$P(x,y,t)$ - интенсивность реактивного давления основания;

$q_i(x,y,t)$ - интенсивность внешней нагрузки, действующей на i-ую пластинку.

На основании (8) уравнение (9) через прогиб записывается в следующем виде:

$$D_0(t)\nabla^2 W - \int_{\tau_1}^{t} R(t,\tau)\nabla^4 W d\tau = q(x,y,t) - P(x,y,t) + \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{\partial \tau_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^i}{\partial y} \right), \tag{11}$$

Здесь $D_0(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t); \quad R(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t) R_i(t,\tau)$ (12)

Далее предполагаем $R_i = R_j = ... = R_n$

Реактивное давление в соответствии с (3) можно представить в виде

$$W_0(x,y,t) = \frac{P(x,y,t)}{C_0(t)} - \frac{1}{C_0(t)} \int_{\tau_1}^{t} K_0(t,\tau) P(x,y,\tau) d\tau \tag{13}$$

$$W_0(t) = \frac{1}{C_0(t)} (1 - K_0^*) P(t) \tag{14}$$

Здесь $W_0(t)$ - вертикальное перемещение поверхностных точек основания.

$$\left.\begin{aligned} K_0^* f &= \int_{\tau_1}^{t} K_0(t,\tau) f(\tau) \\ K_0(t,\tau) &= C_0(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{C_0(\tau)} + C_0(t,\tau) \right] = C_0(t) \frac{\partial \delta_0(t,\tau)}{\partial \tau} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$C_0(t)$ - коэффициент постели, $K_0(t,\tau)$ - мера ползучести материала основания.

Параметры ползучести материала основания определяются согласно опытным данным С.Р.Месчяна [5].

Условие двухсторонней связи пластинки и основания выражается тождеством

$$W(x,y,t) \equiv W_0(x,y,t) \tag{16}$$

На основании (11), (14) и (15) разрешающее уравнение можно представить в виде:

$$(1 - K_0 *) \nabla^4 P(t) = \frac{C_0(t)'}{D_0(t)} \left[q(t) - P(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{\partial \tau_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^i}{\partial y} \right) \right] \tag{17}$$

Для определения неизвестных функций τ_x^i, τ_y^i в заполнителях используем результаты исследований работ [7, 8] и получим следующие системы уравнений:

$$\frac{1}{\xi_{i0}(t)} (1 + \overline{K}_i *) \nabla^2 A_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}^0(t) (1 + K_j *) A_j(t) + (1 + K_i *) \delta_{i0}(t), \tag{18}$$

$$\frac{1}{\xi_{i0}} (1 + \overline{K}_i *) \nabla^2 B_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^0(t) (1 + K *) B_j(t) + (1 + K_j *) \eta_{i0}(t). \tag{19}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_i(t) = \frac{\partial \tau_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^i}{\partial y}; \quad B_i(t) = \frac{\partial \tau_x^i}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y^i}{\partial y}; \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{i,i+1}(t) = \frac{C_i^2}{D_0(t)} + \frac{1 - \nu_{i+1}^2}{E_{i+1}(t) h_{i+1}} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i(t) h_i}; \\ &\delta_{i,i+1}(t) = \frac{C_i C_{i+1}}{D_0(t)} - \frac{1 - \nu_{i+1}^2}{E_{i+1}(t) h_{i+1}}; \delta_{i,i-1}(t) = \frac{C_i C_{i-1}}{D_0(t)} - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i(t) h_i}; \\ &\delta_{ik}(t) = \frac{C_i C_k}{D_0} \qquad (|k-1| > 1); D_0(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j h_j^3}{12(1 - \mu_j^2)}; \\ &\delta_{i0}(t) = \frac{(1 - \nu_i^2) P_i}{E_i(t) h_i} - \frac{(1 - \nu_{i,i+1}^2) P_{i+1}}{E_{i+1} h_{i+1}} \frac{C_i}{D_0} (q(t) - P(t)); \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_{i,i}(t)=2\left[\frac{1+\nu_{i+1}}{E_{i+1}(t)h_{i+1}}+\frac{1+\mu_i}{E_i(t)h_i}\right];\\
&\eta_{i,i+1}(t)=-\frac{2(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}(t)h_{i+1}};\eta_{i,i-1}(t)=-\frac{2(1+\nu_i)}{E_i(t)h_i};\\
&\eta_{ik}(t)=0 \qquad (|i-k|>1);\\
&\eta_{i0}(t)=2\left[\frac{-Q_{i+1}(t)(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}(t)h_{i+1}}+\frac{Q_i(t)}{E_i(t)h_i}\right];\\
&P_i(t)=\frac{\partial P_x^i(t)}{\partial x}+\frac{\partial P_y^i(t)}{\partial y};\quad Q_i(t)=\frac{\partial P_x^i}{\partial x}-\frac{\partial P_y^i}{\partial y};
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$\overline{K}_i * f=\int_\tau^t \overline{K}(t,\tau)f(\tau)d\tau$ - оператор сдвиговой деформации;

$P_x^i(t), P_y^i(t)$ - осевые внешние нагрузки, действующие на i-ый слой по осям ox и oy.

Если силы $\overline{P}_i$ имеют потенциал, то $Q_i(t)$ равно нулю, значение $B_i(t)$ при этом тоже будет равно нулю и поля сдвигающих усилий в заполнителях будут потенциальными. Тогда, следуя А.Р.Ржаницыну [7] и введя потенциальные функции T_i по формулам

$$\tau_x^i(t)=\frac{\partial T_i(t)}{\partial x};\quad \tau_y^i(t)=\frac{\partial T_i(t)}{\partial x};\quad P_x^i(t)=\frac{\partial N_i(t)}{\partial x};\quad P_y^i(t)=\frac{\partial N_i(t)}{\partial y}, \tag{23}$$

получим:

$$A_i(t)=\nabla^2 T_i(t);\quad P_i(t)=\nabla^2 N_i(t). \tag{24}$$

Разрешающие уравнения представляются в следующем виде:

$$(1+K_0*)\nabla^4 P(t)+\frac{C_0(t)}{D_0(t)}P(t)=\frac{C_0(t)}{D_0(t)}\left[q(t)+\sum_{i=1}^{n}C_i\nabla^2 T_i\right], \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\xi_{i0}(t)}(1+\overline{K}*)\nabla^4 T_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}(t)(1+K*)\nabla^2 T_j(t)+\frac{1-\nu_i^2}{E_i(t)h_i}(1+K*)N_i-\\
&-\frac{1-\nu_{i+1}^2}{E_{i+1}(t)h_{i+1}}(1+K*)\nabla^2 N_{i+1}+\frac{C_i}{D_0(t)}(1+K*)[q(t)-p(t)]\quad (i=1,2...,n).
\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, решение задачи об изгибе упругоползучих многослойных с абсолютно жесткими поперечными связями пластин, лежащих на упругоползучем основании, сводится к решению систем интегро-дифференциальных уравнений (25), (26) относительно неизвестных функций при соответствующих граничных условиях.

Для оператора сдвиговой деформации $\overline{K}*$ согласно Ю.Н.Работнову [6] можно принять следующий оператор:

$$\overline{K}*=\left(\frac{E_0}{E*}+\alpha K_0\frac{E_0}{G*}\right);\quad K_0=\pi^2\frac{h^2}{\ell^2}, \tag{27}$$

h - половина высоты сечения, α - коэффициент, зависящий от закрепления концов и вида нагрузки.

При постоянном во времени коэффициенте Пуассона имеем:

$$G*=\frac{E*}{2(1+\nu)}. \tag{28}$$

Поэтому для оператора $\overline{K}*$ имеем:

$$\overline{K}*=1+\lambda_0 K* \tag{29}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1 + 2\nu\alpha K_0}{2[1 + (1+\nu)\alpha K_0]}. \tag{30}$$

Как указывает Ю.Н.Работнов, для пластин легким заполнителем, когда внешние слои изготовлены из металла, является, например, пенопласт. В этом случае можно считать $E^* = E$ и вся деформация ползучести связана со сдвигом, а формула (27) содержит тот же один оператор G^*, α изменяется в пределах: для консоли $\alpha = 0{,}162$; для свободно опертой балки $\alpha = 0{,}39$; для консоли под действием сосредоточенной силы на конце $\alpha = 0{,}122$. Эти величины необходимы при проведении численных расчетов.

Литература

1 Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. –М.:Гостехиздат, 1952.- 252 с.
2 Ширинкулов Т.Ш. Расчет конструкции на сплошном основании с учетом ползучести.-Ташкент:Фан, 1969.- 271 с.
3 Задоян М.А. О вариационных уравнениях теории ползучести//Доклады АН Арм.ССР.-1958.-Т. 26,№ 5.
4 Курбаниязов М.П. К расчету упругоползучих прямоугольных плит на упругоползучем основании //Известия АН Уз ССР, серия тех.наук.- №2.-1973. – С.15-20.
5 Месчян С.Р. Ползучесть глинистых грунтов.- Ереван, 1967. – С.3-150.
6 Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. -М.: Наука, 1977.-381 с.
7 Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки.-М.: Стройиздат, 1986.- 313 с.
8 Бишимбаев В.К., Ширинкулов Т.Ш., Дасибеков А.Д. Изгиб, устойчивость и колебания составных анизотропных пластин, взаимодействующих с деформируемой средой.- Шымкент, 2004.-201 с.
9 Гайтова Л.М. Расчет на изгиб упругоползучей железобетонной плиты на упругоползучем основании // Известия АН Арм. ССР, серия техн.наук XXIX.- №4.- 1976.-С.37-42.

Қорытынды

Мақалада көп қабатты серіппелі-жылжымалы плитаның серіппелі-жылжымалы негіз үстінде жатқан кездегі иілу есебі қарастырылған. Плитаның серіппелі-жылжымалы қасиеті Маслов-Арутюнян теориясы арқылы есепке алынған, ол жатқан дене серіппелі-жылжымалы Винклер негізі болып есептелінеді. Есеп шешілетін интегро-дифференциал теңдеулер жүйесіне келтірілген.

Summary

In the work is consider the bending of the multilayer elastic and crawl plates on elastic-crawl foundation. The task is bringing to a close by deciding of the systems of integral and differential equations. The elastic-crawl properties of plate follow Maslov-Arutunyns theory. The plate fall on the body, which is elastic-crawl base of Vinclers.