modeled.

ӘОЖ 372.851.02

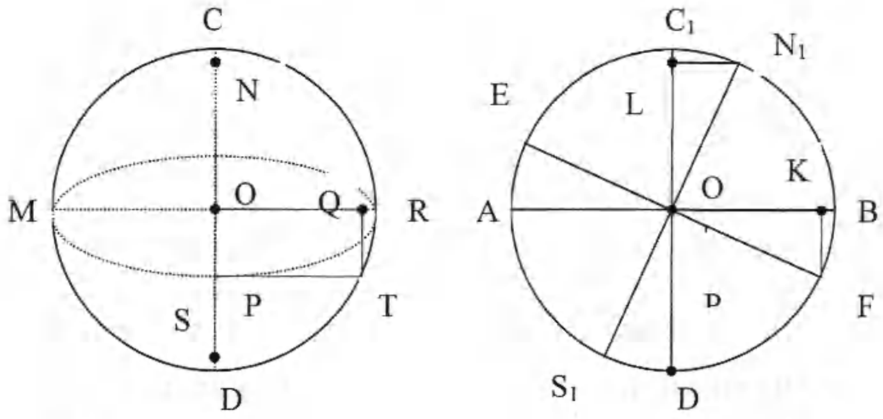
ШАРДЫ ЖӘНЕ ОҒАН ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН ДЕНЕЛЕРДІ КЕСКІНДЕУДІ ОҚЫТУ ӘДІСТЕРІ

Д. Рахымбек, Н.К. Мадияров
М.Әуезов атындағы ОҚМУ, Шымкент қ.

Мектеп геометриясындағы айналу денелері кескіндерінің ішіндегі ең күрделісі шардың кескінін салу болып табылады. Шарды кескіндеу барысында негізгі жазықтық ретінде, экватор деп аталатын үлкен дөңгелектердің бірі жатқан жазықтық қарастырылады. Экватордан ең алыс қашықтықта жатқан шар бетінің нүктелері, яғни экватор жазықтығына перпендикуляр диаметр ұштары – полюстар деп аталады. Сфераға тиісті және полюстар арқылы өтетін шеңберлер – меридиандар деп аталады. Осы сияқты география ұғымына сәйкес параллельдер ұғымын да енгізуге болады.

Шарды (сфераны) проекциялау барысында оның экваторының кескіні бейнелеу жазықтығында эллипс түрінде кескінделеді. Бұл эллипстің үлкен осі MR шардың кескінінің шекарасын беретін шеңбердің диаметрі болады. Шар полюстары бұл шеңбердің бойында жата алмайды. Егер жататын болса, онда шар бейнелеу жазықтығына параллель проекцияланып, оның экваторының кескіні эллипс емес MR кесіндісі болған болар еді. Өкінішке орай көп әдебиеттердің өзінде осындай қателер кездеседі. Шар экваторының кескіні эллипс болып кескінделуі үшін проекцияның ортогональдығын сақтай отырып, бейнелеу жазықтығына перпендикуляр жазықтықта шар осін кішкене бір бұрышқа бұру қажет. Сонда шар полюстарының кескіндері шеңбердің CD диаметрінің бойындағы N, S нүктелеріне жылжиды және ON=OS шарты орындалады (1,а-сурет). Мұндағы экватордың кескіні болатын эллипстің үлкен жарты осі шар радиусына тең, ал кіші жарты OP осінің ұзындығы ON=OS арақашықтығына тікелей байланысты. Осы байланысты анықтау үшін шардың осін айналдырған жазықтықпен қиғандағы қимасын аламыз (1,ә-сурет). Бұл суреттегі C_1D_1 – шар осінің бастапқы қалпы, N_1S_1 – остің бұрғаннан кейінгі қалпы. AB – кесіндісі MR диаметріне перпендикуляр диаметрдің бастапқы қалпы болса, EF – осы диаметрдің бұрғаннан кейінгі қалпы. O_1L_1 - O_1N_1 кесіндісінің C_1D_1 түсірілген проекциясы; O_1K - O_1F кесіндісінің AB диаметріне түсірілген проекциясы; O_1L_1=ON болады, ал KF кесіндісі экваторды кескіндейтін эллипстің кіші жарты осінің шамасын береді. Сонымен қатар, $L_1O_1N_1$ және KO_1F үшбұрыштарының теңдігінен O_1L_1=O_1K екендігі шығады. Олай болса, шардың ортогональ проекциясынан алынған элементтер бойынша оның кескінін салудың мынадай қарапайым тәсілін аламыз.

1. Шардың шекарасының кескінін беретін центрі O және диаметрі CD болатын шеңбер салынады;
2. CD диаметрінің бойынан ON=OS болатындай, N және S нүктелері салынады;
3. CD диаметріне перпендикуляр MR диаметрі салынады;
4. MR диаметрінде OQ=ON кесіндісі өлшеп салынады;
5. Q нүктесінен MR диаметріне перпендикуляр түзу түсіріп, оның шеңбермен қиылысу нүктесін T арқылы белгілеу;
6. QT кесіндісінің шамасын кіші жарты осі етіп алып экватор кескінін беретін эллипсті салу.

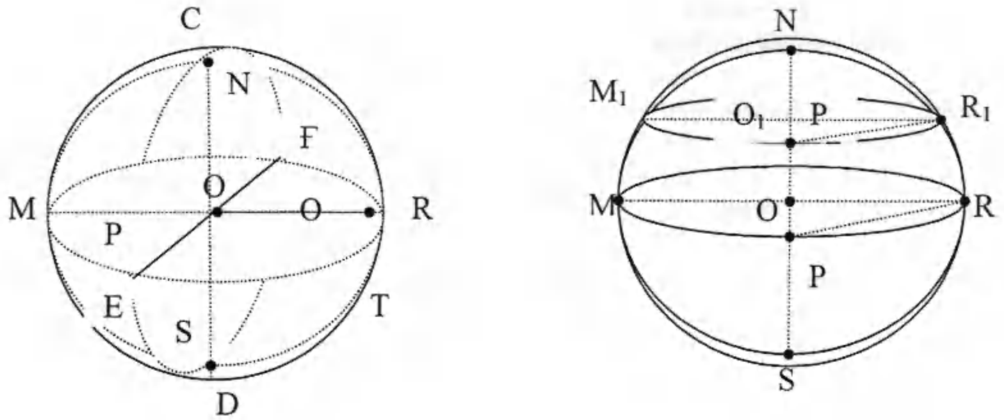


а) ә)

1-сурет. Шар полюстарының кескіндері

Немесе керісінше, бірінші экватор кескінін кез келген эллипс етіп салып, одан кейін барып полюстарының кескіндерін салуға болады.

<u>1-есеп:</u> *Шардың меридианын кескіндеу.* M, N, R және S нүктелері арқылы меридианның кескіні болатын эллипстің кескінін салуға болады (2-сурет). Осыған ұқсас экватор жазықтығында O нүктесі арқылы өтетін EF диаметрінің ұштары E, F нүктелері мен N, S нүктелері арқылы меридиан кескіндерін салуға болады.



2-3 сурет. Шардың меридианын, ендіктерін кескіндеу

<u>2-есеп:</u> *Шардың ендіктерін кескіндеу.* Ол үшін алдымен шардың MR диаметрінің ұштары және N, S полюстары арқылы өтетін меридианының кескінін салып аламыз. Шар ендіктері оның экваторы жазықтығымен параллель жазықтықтарда жататындығын және олар ұқсас эллипстер болатындығын ескерсек, NS диаметрін O_1 нүктесінде қиып өтетін ендіктің кескінін мынадай ретте салуға болады (3-сурет): O_1 нүктесі арқылы шардың MR диаметріне параллель түзу жүргізіп, оның меридианмен қиылысу нүктелерін сәйкесінше M_1, R_1 нүктелері арқылы белгілейміз. R_1 нүктесінен PR кесіндісіне параллель түзу жүргізіп, оның NS диаметрімен қиылысу нүктесін P_1 арқылы белгілейміз. Олай болса ізделінді ендіктің кескіні осы M_1, P_1 және R_1 нүктелері арқылы өтетін эллипс болады.

Шардың және оның негізгі элементтерінің кескіндерін салу әдістерімен танысқаннан соң, оқушыларға шарға іштей және сырттай сызылған денелердің кескіндерін салу тәсілдерін үйретуге болады. Ол үшін, берілген кеңістік денесі мен шардың жанасу нүктелері мен оның элементтерін кескіндеу ретін анықтап алу қажет. Мысалы, шарға сырттай сызылған дұрыс төртбұрышты пирамиданың кескінін салу үшін, алдымен мына мәселелерді анықтап алған дұрыс:

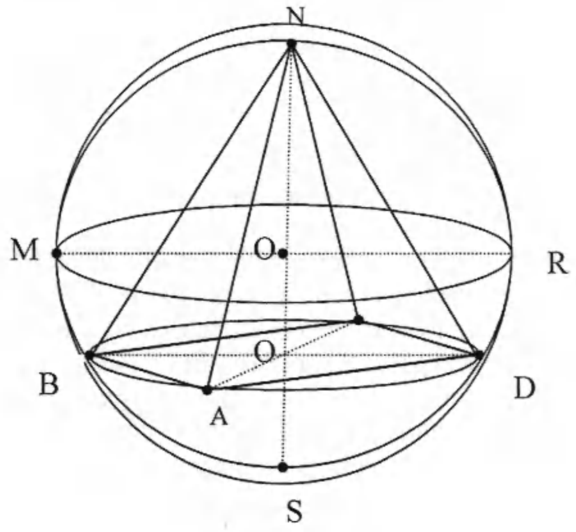
- Пирамиданың табанындағы квадрат жатқан жазықтық шардың полюсін, квадраттың центрінде жанайды;
- Пирамиданың бүйір беттерінің шармен жанасу нүктесі оның апофемаларының бойында жатады;
- Пирамиданың биіктігі шардың центрі арқылы өтеді.

Сол сияқты, шарға іштей сызылған дұрыс үшбұрышты тік призманың кескінін салу үшін, алдымен оның жоғарғы және төменгі табандарының төбелері экваторға параллель, әрі одан бірдей қашықтықта орналасқан ендіктердің бойында жататындығы негізделеді және т.с.с. Бұл келтірілген дәйектердің барлығы дәлелдеуді қажет етеді. Бірақ бұл дәлелдеулерді жүргізуде сызбаларды көрнекілік ретінде қолдана алмаймыз. Өйткені, біз оқушыларды әлі бұндай кескіндерді салу ережелерімен таныстырған жоқпыз. Сызбаны пайдаланбай дәлелдеу жұмыстарын жүргізу оқушыларға көптеген қиындықтар тудырады және орындалатын салуларды елестете отырып орындауға тура келеді. Бұл қиындықтарды жою мақсатында шарға іштей және сырттай салынған денелердің қаңқалы (каркасный) және мөлдір (прозрачный) моделдерін пайдалануға болады.

Сондай-ақ, кез келген геометриялық денені шарға іштей және сырттай салу мүмкін бола бермейтіндігі белгілі. Бірақ біз мақалада бұл мәселені зерттеуді мақсат етпегендіктен, тек шарға іштей және сырттай салуға болатын денелердің кескінін салу мәселесіне ғана тоқталып отырмыз.

Шарға іштей салынған денелердің кесікінін салуды оқыту үшін алдын-ала дайындық жұмыстарын жүргізген тиімді. Мысалы, *шарға іштей салынған дұрыс төртбұрышты пирамиданың кескінін салу* есебіне тоқталайық.

Шешуі: Жүргізілген талдаулар нәтижесінде, пирамида төбесі шар полюсында жататындығын, ал табанындағы квадрат шар ендігіне (ендік – шеңбер) іштей сызылған болатындығын анықтаймыз. Яғни, оның кескінін салу үшін жоғарыда көрсетілген тәсілдерді (шар ендіктерінің кескінін салу; шеңберге іштей сызылған квадраттың кескін салу) пайдаланылып шардың ендігі және оған іштей сызылған квадрат кескіндері салынып, шар полюсын квадрат төбелерімен қосамыз (4-сурет). Әрине, мұндағы пирамиданың түріне қарай оның төбесі шар полюсынан басқа жерде де орналасуы мүмкін.



4-сурет. Шарға іштей сызылған пирамида

Шарға іштей сызылған денелердің кескіндерін салу

Конусқа іштей сызылған пирамиданың кескінін салу	Қиық конусқа іштей сызылған қиық пирамиданың кескінін салу	Цилиндрге іштей сызылған призманың кескінін салу
Шарға іштей сызылған конустың кескінін салу	Шарға іштей сызылған қиық конустың кескінін салу	Шарға іштей сызылған цилиндрдің кескінін салу
Шарға іштей сызылған пирамиданың кескінін салу	Шарға іштей сызылған қиық пирамиданың кескінін салу	Шарға іштей сызылған призманың кескінін салу

5-сурет. Шарға іштей сызылған денелердің кескіні

Көріп отырғанымыздай, шарға іштей салынған пирамида кескінін салу барысында алдымен, оның төбесі мен табаны іштей сызылған ендік (шеңбер) кескіні салынды. Ал, бұл шарға іштей сызылған конустың кескінін береді.

Олай болса, оқушыға шарға іштей сызылған пирамида кескінін салуды оқыту алдында конусқа іштей сызылған пирамиданы, содан соң шарға іштей сызылған конусты кескіндеу әдістерін үйрету тиімді болмақ. Осы сияқты талдаулар жасай отырып, шарға іштей сызылған денелердің кескіндерін салуды оқыту мына төмендегідей жүйемен жүргізілуі керектігін анықтадық (5-сурет).

Мұнда, қиық конусқа іштей салынбайтын қиық пирамида және цилиндрге іштей салынбайтын призма шарға да іштей салынбайтындығын атап өтуге болады.

Енді осы жүйе бойынша шарға іштей сызылған дұрыс үшбұрышты тік призманың кескінін салуға тоқталайық:

1. *Цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты тік призманың кескінін саламыз.* Цилиндр кескіні берілген болсын, онда ол кескін метрикалық анықталған болады. Сондықтанда цилиндр табандарының кескіндері болатын эллипстерге іштей сызылған дұрыс үшбұрыш кескінін еркін салуға болмайды. Ол мынадай ретпен орындалады:

▪ эллипстің бірінің EF, MN түйіндес диаметрлерінің кескіндерін саламыз. EO кесіндісінің ортасы K нүктесі салынады. K нүктесі арқылы MN диаметріне параллель AB кесіндісін жүргіземіз. Ол үшбұрыштың бір қабырғасы болып табылады. Үшбұрыштың үшінші C төбесі F нүктесіне сәйкес келеді (6,а–сурет). Өйткені, дұрыс үшбұрыштың қасиеттеріне сәйкес FK кесіндісі ABC үшбұрышының әрі медианасы (AK=KB), әрі биіктігі ($NM//AB$, $NM \perp EF$ $\Rightarrow AB \perp EF$) болып табылады.

▪ Үшбұрыш төбелерінен цилиндрдің OO_1 осіне параллель AA_1, BB_1, CC_1 қырларын жүргіземіз (6,ә-сурет).

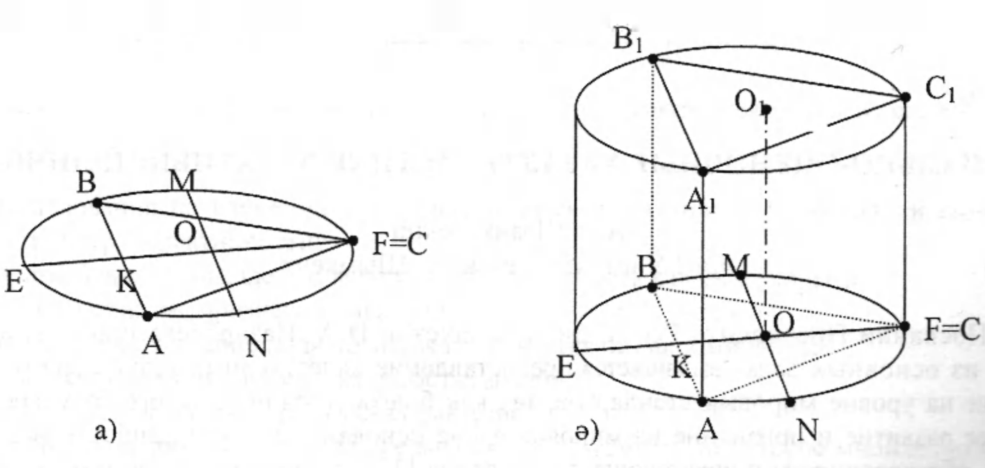
▪ A_1, B_1, C_1 нүктелерін кесінділермен қосамыз.

2. *Шарға іштей сызылған цилиндрдің кескінін саламыз.* Шардың кескіні берілген болса, бұл салу мынадай ретпен орындалады:

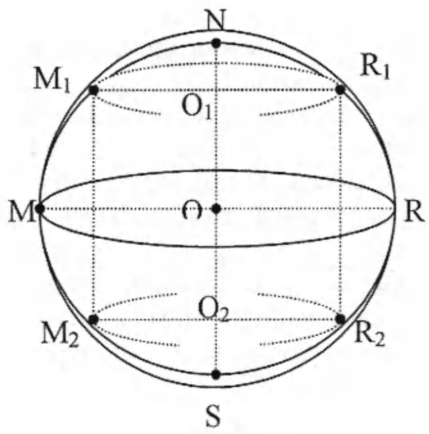
▪ Шардың NS диаметрі бойынан O центрінен қарама-қарсы бағытта цилиндрдің биіктігінің жартысына тең OO_1, OO_2 кесінділерін өлшеп саламыз (7-сурет).

▪ Жазықтықтары O_1, O_2 нүктелері арқылы өтетін ендіктердің кескіндерін саламыз (2-есеп). Бұл эллипстер берілген цилиндрдің табандарының кескіндері болып табылады.

M_1M_2 және R_1R_2 кесінділерін жүргіземіз.



6-сурет. Цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрыш тік призманың кескіні



7-сурет. Шарға іштей сызылған цилиндр кескіні

3. *Шарға іштей сызылған дұрыс үшбұрышты тік призманың кескінін салу* үшін жоғарыдағы 1-2 мысалдардағы көрсетілген тәсілдерді топтастыра қолдану жеткілікті.

Шарға сырттай сызылған денелердің кескіндерін салу тәсілдерін оқытуды да осыған ұқсас тәсілдер бойынша бір жүйеге келтіруге болады.

Резюме

В статье рассмотрены теоретические и методические ошибки, допускаемые при построении изображения шара и указаны пути их недопущения. Систематизирован порядок обучения построению изображения тел, вписанных в шар.

Summary

Theoretical and methodical mistakes made in drawing the image of sphere are considered in this article and the ways of their unpermission are pointed. The teaching procedure of the image of bodies, included in sphere is ordered.