УДК 531

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

Ж.К. Киргизбаев, К. Досыбеков, С.К. Досыбеков
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент, МКТУ им. А. Ясави, г. Туркестан

Исследуется влияние непотенциальных сил на устойчивость нестационарного движения механических систем с помощью построения Ляпунова, зависящего от матрицы с произвольными переменными элементами.

Более подробно рассмотрены частные случаи задания этой матрицы, которые обобщают и распространяют на нестационарный случай некоторые известные результаты о стабилизируемости невозмущенного состояния стационарной системы путем добавления достаточно больших диссипативных и потенциальных сил.

I. Рассмотрим механическую систему с нестационарными голономными связями:

$$\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_1(q,\dot{q},t),$$

где $q,\dot{q}$ - n-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей системы; $Q_1(q,\dot{q},t)$ -вектор обобщенных сил, соответствующий совокупности всех действующих, в том числе непотенциальных сил; Т- кинетическая энергия вида:

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^{T}A(q,t)\dot{q}+\dot{q}^{T}a(q,t)+\frac{1}{2}a_0(q,t) \tag{1}$$

с симметрической матрицей $A(q,t)$, n- мерным вектором $a(q,t)$ и скалярной функцией $a_0(q,t)$.

Допустим, что система обладает нестационарным невозмущенным движением $q_0(t)$.

Составим уравнение возмущенного движения в форме Лагранжа второго рода. Для этого заменим q в (1) на $q_0(t) + \overset{=}{x}$, где $\overset{=}{x}$ - вектор отклонений от невозмущенного движения. Тогда получим:

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^T A(q_0 + x, t)\dot{x},$$

$$T_1 = \dot{x}^T\left[A(q_0 + x, t)\dot{q}_0 + \bar{a}(q_0 + x, t)\right],$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\left[\dot{q}_0^T A(q_0 + x, t)\dot{q}_0 + 2\dot{q}_0^T \bar{a}(q_0 + x, t) + a_0(q_0 + x, t)\right]$$

Теперь, принимая $\overset{=}{x}$ за новый вектор обобщенных координат6 уравнение движения системы представим в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q(x, \dot{x}, t), \tag{2}$$

где

$$Q = Q_1(q_0 + x, \dot{q}_0 + \dot{x}, t) + Q_2(x, \dot{x}, t) + Q_2(x, \dot{x}, t),$$

$$Q_2 = \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}}\right).$$

Введем следующие матрицы:
Симметричные

$$D = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial \dot{x}}\right)_0 + \left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial \dot{x}}\right)_0^T\right],$$

$$F = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial x}\right)_0\right]. \tag{3}$$

$$\underset{=}{\bar{C}} = F + \frac{1}{2}\left[A\dot{H} - (D - G)H + \dot{H}^T A - H^T(D + G)\right]$$

и кососимметрические

$$G = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial \dot{x}}\right)_0 - \left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial \dot{x}}\right)_0^T\right]_0,$$

$$E = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial x}\right)_0^T\right],$$

$$\overline{E} = E + \frac{1}{2}\left[A\dot{H} - (D - G)H - \dot{H}^T A + H^T(D + G)\right],$$

где T - знак транспонирования; 0 - знак вычисления при $x = \dot{x} = 0$; H – произвольная функциональная матрица от t, $\dot{H} = \frac{dH}{dt}$. Допустим, что Q и A разложимы в абсолютно сходящийся ряд по степени x и $\dot{x}$. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема I. Если существует матрица $H(t)$ с ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми элементами, такая, что квадратичная форма:

$$\underline{\underline{V}} = x^T\left[\overline{\underline{\underline{C}}}(t) - H^T A H\right] x \tag{4}$$

определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел, а форма:

$$\underline{\underline{W}} = -\dot{x}^T\left(D + AH + \frac{\dot{A}}{2}\right)\dot{x} - \dot{x}^T E x + x^T\left[H^T(F-E) + \frac{\dot{\overline{C}}}{2}\right]x \tag{5}$$

определенно - отрицательна, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Для доказательства этой теоремы заметим, что в силу уравнения возмущенного движения (2) имеет равенство (см. Приложение):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} = \left(\dot{x}^T A\dot{x} + \underline{\underline{V}} + X_1^{(3)}\right) = \underline{\underline{W}} + X_2^{(3)}, \tag{6}$$

где $\dot{\underline{x}} = \dot{x} - H(t)x$; $X_1^{(3)}, X_2^{(3)}$ - члены выше второго порядка малости.

Функция в левой части (6), заключенная в скобку, является определенно - положительной и допускающей бесконечно малый высший предел, так как A является определенно - положительной матрицей кинетической энергии системы. Следовательно, асимптотическая устойчивость невозмущенного движения имеет место в силу определенной отрицательности функции $\underline{\underline{W}}$.

2. Теперь рассмотрим некоторые частные виды нестационарных систем. Прежде всего обратимся к сугубо частным видам матрицы:

А. Случай $H = -I$, где I -единичная матрица. В этом случае уравнение (6) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} = \left[\dot{x}^T A\dot{x} + x^T(F + D - A)x + X_1^{(3)}\right] = -\dot{x}^T\left(D - A + \frac{\dot{A}}{2}\right)\dot{x} - \dot{x}^T(E - G)x - x^T\left(F - \frac{\dot{F} + \dot{D}}{2}\right)x + X_2^{(3)}.$$

По виду этого уравнения можно сделать следующее заключение.

Теорема 2. $E = G$ и матрицы A, $\left(D - A + \frac{\dot{A}}{2}\right), (F + D - A), \left(F - \frac{\dot{F} + \dot{D}}{2}\right)$ определенно-положительны, удовлетворяют обобщенным условиям Сильвестра [1], то невозмущенное движение нестационарной системы асимптотически устойчиво.

Б. Случай $H = -\delta I$, где δ – произвольная положительная постоянная. В этом случае уравнение (6) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}=[\dot{x}^{T}A\dot{x}+x^{T}(F-\delta^{2}A+\delta D)x]+X_{1}^{(3)}=-\dot{x}(D-\delta A+\frac{\dot{A}}{2})\dot{x}-\dot{x}^{T}(E-\delta G)x-x^{T}\delta(F-\frac{\dot{F}+\dot{D}}{2}x+X_{2}^{(3)}.$$

по виду этого уравнения можно сделать следующее заключение.

Теорема 3. Если $E=\delta G$ и матрицы A

$[F+\delta(D-\delta A)],(D-\delta A+\frac{\dot{A}}{2}),\ (F-\frac{\dot{F}+\dot{D}}{2})$ определенно-положительны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Заметим, что и при $E\neq\delta G$ выбором достаточно больших значений элементов матриц Д или F возможна стабилизация нестационарного движения, независимо от характера этого движения и действующих на систему гироскопических и неконсервативных сил. Это предложение можно рассматривать как распространение на нестационарный случай аналогичных утверждений Карапетяна А.В [2] и Вербицкого В.Г. [3], касающихся возможности стабилизации стационарного состояния системы достаточно большими диссипативным и потенциальными силами.

Действительно, в стационарном случае при $\delta=-1$ из (4) получим функцию Ляпунова:

$$V=\frac{1}{2}\dot{x}A\dot{x}+\frac{1}{2}x^{T}(F+D-A)x,$$

построенную Вербицким В.Г. и, очевидно, все результаты его работы [3].

Приложение : <u>Доказательство соотношения (6)</u>

Введем замену $\dot{x}=\dot{x}+H(t)x.$ Тогда Т имеет следующий вид:

$$T^{1}=T_{2}{}^{1}+T^{1}{}_{1}+T_{0}{}^{1},$$

$$\text{где } T^{1}{}_{2}=\frac{1}{2}\dot{x}^{T}A(x,t)\dot{x},\quad T^{1}{}_{1}=\dot{x}^{T}AH_{x},\quad T_{0}{}^{1}=\frac{1}{2}x^{T}H^{T}AHx.$$

Теперь уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^{1}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T_{2}}{\partial x}=Q.$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на $\dot{x}^{T}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^{1}}{\dot{x}}\right)-\frac{\partial T^{1}}{\partial\dot{x}}=\dot{x}^{T}Q+\dot{x}^{T}\frac{\partial T_{2}}{\partial x}.$$

Согласно теореме Эйлера об однородных функциях, учитывая структуру $T_{2}, T^{1}{}_{1}, T_{0}{}^{1}$, получим:

$$\frac{d(T_2^{|}-T_0^{|})}{dt}=-\dot{x}^T\frac{\partial(T_1^{|}+T_0^{|})}{\partial x}-\frac{\partial T^{|}}{\partial t}+\dot{x}^T Q-x^T H^T Q-\dot{x}T\frac{\partial T_2^{|}}{\partial x}+(\dot{x}^T-x^T H^T)\frac{\partial T_2}{\partial x} \qquad (7)$$

Заметим, что последние два члена в правой части уравнения имеют выше второго порядка малости относительно x и $\dot{x}$, а первые члены представляются в виде:

$$-\dot{x}^T\frac{\partial(T_2-T_0^{|})}{\partial t}=-\dot{x}^T H^T A\dot{x},\quad -\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial t}\dot{x}-\dot{x}^T-A\dot{H}x$$

Подставляя эти выражения в (7), получим:

$$\frac{d(T_2-T_0)}{dt}=-\dot{x}(H^T A+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t})\dot{x}-\dot{x}^T A\dot{H}x+\dot{x}^T Q-x^T H^T Q+R^{(3)},$$

где $R^{(3)}$ - члены выше второго порядка малости.

По условию Q и A разложим а абсолютно сходящийся ряд по степени x и $\dot{x}$.

Следовательно, учитывая обозначения (3), последнее уравнение разложения в ряд можно представить в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\dot{x}^T A\dot{x}+x^T(\underline{\underline{\overline{C}}}-H^T AH)x+X_1^{(3)}]=-\dot{x}^T(H^T A+\frac{\dot{A}}{2}+D)\dot{x}-\dot{x}^T\overline{E}+x^T[H^T(F+E)+\frac{\dot{\overline{C}}}{2}]x+X_2^{(3)},$$

что доказывает справедливость соотношения (6).

Литература

1 Гантмахер Ф..Р. Теория матриц. –М.: Наука, 1967. -С. 575.
2 Крапетян А..В. Об устойчивости неконсервативных систем // Вестн. МГУ. Математика, механика.- 1975. -№4. -С. 109-1130.
3 Вербицкий В.Г. Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы // Прикладная механика. - Киев, 1982 . -Т.18. -№12. -С. 119-121.

Қорытынды

Элементтері ерікті айнымалы матрицаларға тәуелді механикалық жүйенің стационарлық емес қозғалысының орнықтылығына потенциалдық емес күштер әсері Ләпунов әдісі жәрдемімен зерттеледі. Матрицалар берілуінің дербес жағдайлары толығырақ карастырылған.

Summary

The influence of not potential forces on stability of non-stationary movement of mechanical systems with the help of construction Lapunovs, dependent from a matrix with any variable elements is investigated.