УДК 539.41

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ В НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОМ ПО ТОЛЩИНЕ ЦИЛИНДРЕ

Н.И. Лысенко
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Рассмотрим случай осесимметричного температурного воздействия на длинный полый цилиндр с внутренним радиусом a и наружным радиусом b (рисунок 1).

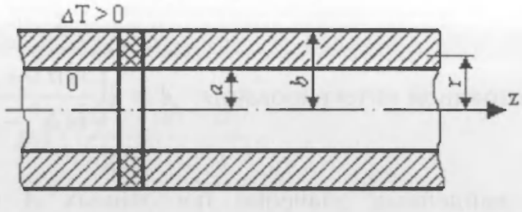

Рисунок 1

Примем, что разность температур по внутренней и наружной поверхностях цилиндра составляет ΔT. Пусть температура по толщине стенки цилиндра изменяется вдоль радиуса r по линейному закону:

$$T = \Delta T \cdot \frac{r-a}{b-a}, \tag{1}$$

где ΔT – температурный градиент.

Используем общее решение осесимметричной задачи плоского напряжённого состояния для длинного цилиндра [1], без учёта инерционных сил:

$$\sigma_r = \frac{B}{r^2} + \frac{A}{r^2}(r^2 - a^2) - \frac{E\alpha}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2}\int_a^r rTdr, \tag{2}$$

где A и B – постоянные интегрирования;

σ_r – радиальное напряжение;

E – модуль продольной упругости материала;

μ – коэффициент Пуассона;

α – линейный коэффициент температурного расширения;

r – текущий радиус.

Из граничных условий определяем постоянные интегрирования:

1) при $r = a$ $\sigma_r = 0$; $\frac{B}{a^2} = 0$, $B = 0$;

2) при $r = b$ $\sigma_r = 0$,

$$\frac{A(b^2 - a^2)}{b^2} - \frac{E\alpha}{1-\mu} \cdot \frac{1}{b^2}\int_a^b rTdr = 0 \tag{3}$$

Подставляя под знак интеграла значение T из формулы (1), соотношение (3) приводим к виду:

$$\frac{A(b^2-a^2)}{b^2}-\frac{E\alpha\cdot\Delta T}{1-\mu}\cdot\frac{1}{b^2(b-a)}\int_a^b r(r-a)dr=0$$

Вводим обозначение $\quad \dfrac{E\alpha\cdot\Delta T}{1-\mu}=\lambda \qquad (4)$

и производим интегрирование в пределах от a до b. В результате получаем:

$$A(b^2-a^2)-\lambda\left(\frac{2b^2-3ab^2+a^3}{6(b-a)}\right)=0,$$

откуда находим значение постоянной интегрирования: $A=\lambda\left(\dfrac{2b^2-3ab^2+a^3}{6(b^2-a^2)(b-a)}\right)$.

После подстановки найденных значений постоянных A и B в уравнение (2) и проведения соответствующих преобразований устанавливаем, что радиальные температурные напряжения от неравномерного нагрева стенки цилиндра равны:

$$\sigma_r=\frac{\lambda}{3(b^2-a^2)}\left[b^2+ab+a^2-(b+a)r-\frac{a^2b^2}{r^2}\right] \qquad (5)$$

Переход к кольцевым напряжениям осуществляем по известному уравнению равновесия [1]:

$$\sigma_t=\frac{d}{dr}(\sigma_r\cdot r).$$

В результате дифференцирования получаем следующую окончательную формулу для кольцевых температурных напряжений от неравномерного нагрева стенки цилиндра по указанному выше линейному закону (1):

$$\sigma_t=\frac{\lambda}{3(b^2-a^2)}\left[b^2+ab+a^2-2(b+a)r+\frac{a^2b^2}{r^2}\right] \qquad (6)$$

Теперь определим осевые температурные напряжения σ_z, действующие вдоль продольной оси z неравномерно нагретого цилиндра.

Выделенное из цилиндра тонкое кольцо в соответствии с рисунком 1 уже нельзя рассчитывать как плоский диск [1], так как осевые напряжения σ_z в этом случае не равны нулю. Однако, в силу симметрии конструкции известно, что осевая деформация ε_z = const, т.е. поперечные сечения цилиндра остаются плоскими, и в результате получаем обобщённую плоскую деформацию. В этом случае на основании обобщённого закона Гука имеем:

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-\mu\sigma_r-\mu\sigma_t)+\alpha T=C,$$

откуда, с учётом формулы (1), $\sigma_z=C_1+\mu(\sigma_r+\sigma_t)-\dfrac{E\alpha\Delta T}{b-a}(r-a)$, где $C_1=EC$.

После подстановки значений σ_r и σ_t из формул (5) и (6) соответственно, выражение осевых напряжений преобразуем к виду:

$$\sigma_z = C_1 + \frac{\mu\lambda}{3(b^2 - a^2)}\left[2(b^2 + ab + a^2) - 3(b+a)r\right] - \frac{(1-\mu)\lambda}{b-a}(r-a).$$

После преобразований находим, что:

$$\sigma_z = C_1 + \mu\lambda \cdot \frac{2b^2 - ab - a^2}{3(b^2 - a^2)} - \frac{\lambda}{b-a} \cdot (r-a), \text{ или}$$

$$\sigma_z = C_2 - \frac{\lambda}{b-a} \cdot (r-a), \qquad (7)$$

$$C_2 = C_1 + \mu\lambda \cdot \frac{2b^2 - ab - a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

Тогда C_2 будет напряжение при $r = a$, т.е. у внутренней поверхности цилиндра. Это напряжение определяется из условия равновесия цилиндра $\Sigma Z = 0$.

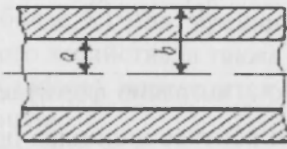

Рисунок 2

$$\int_A \sigma_z \, dA = 0; \quad \int_a^b \sigma_z \cdot 2\pi r \, dr = 0, \quad \text{или} \quad \int_a^b \sigma_z \cdot r \, dr = 0.$$

Подставляя значение напряжения σ_z из формулы (7) под знак последнего интеграла и производя интегрирование, получаем значение постоянной:

$$C_2 = \lambda \frac{2b^2 - ab - a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

С учётом этого соотношения формула осевых напряжений (7) преобразуется к следующему окончательному виду:

$$\sigma_z = \lambda\left[\frac{2(b^2 + ab + a^2)}{3(b^2 - a^2)} - \frac{r}{b-a}\right] \qquad (8)$$

По формулам (5), (6) и (8) ниже построены эпюры распределения всех трёх температурных напряжений по толщине стенки цилиндра:

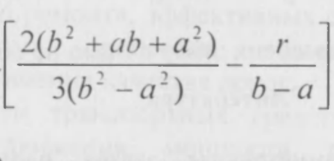

Рисунок 3

Экстремальное значение самоуравновешивающихся радиальных напряжений σ_r получим, определив первую производную от выражения σ_r по переменной r и приравняв её нулю. Это будет иметь место при значении:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2a^2b^2}{b+a}}.$$

Искомое максимальное значение радиальных напряжений при этом составит:

$$\max\sigma_r = \frac{\lambda}{3(b^2-a^2)}\left[b^2+ab+a^2-\sqrt[3]{2a^2b^2(b+a)^2}-\frac{ab\sqrt[3]{(b+a)^2}}{\sqrt[3]{4ab}}\right].$$

Наибольшее значение кольцевых напряжений будет у внутренней поверхности цилиндра при $r = a$ и составит оно, согласно формуле (6):

$$\max\sigma_t = \lambda\,\frac{2b^2-ab-a^2}{3(b^2-a^2)}.$$

Значение осевых напряжений $\max\sigma_z$, согласно формуле (8), при $r = a$ будет тем же самым, т.е. $\max\sigma_z = \max\sigma_t$. На наружном контуре цилиндра при $r = b$ напряжения σ_t и σ_z будут отрицательны и также равны между собой:

$$\sigma_t = \sigma_z = -\frac{\lambda}{3(b^2-a^2)}(b^2+ab-2a).$$

Точки пересечения эпюр кольцевых σ_t и осевых σ_z напряжений с осью находим, приравняв нулю выражения (6) и (8) соответственно. Тогда получим:

$$b^2+ab+a^2-2(b+a)r+\frac{a^2b^2}{r^2}=0;$$

применительно к эпюре σ_z –

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}.$$

Очевидно, что эти точки пересечения обеих эпюр с осью не совпадают между собой.

Литература

1 Лысенко Н.И. Обобщённая осесимметричная задача плоского напряжённого состояния вращающегося диска и толстостенного цилиндра. // Наука и образование Южного Казахстана. Серия: Механика и машиностроение. - Шымкент, 2002. -№30. – С.54.

2 Лысенко Н.И. Температурные напряжения в неравномерно нагретых цилиндрах. //Наука и образование Южного Казахстана. Серия: Механика и машиностроение. -Шымкент, 2004. -№2(37). –С.25.

Қорытынды

Біртекті қыздырылмаған ұзын цилиндрдегі серпімді жылу кернеуі анықталады. Радиус бойындағы температура сызықтық заңмен өзгереді. Ұзын цилиндрдегі өсті симметриялы жазық кернеулі жағдайдың есебінің жалпы шешімі колданылған. Цилиндр кабырғасындағы радиальді, сахиналы және өстік жылу кернеулерінің жалпы формулалары алынған, олардың эпюралары тұрғызылған.

Summary

Thermal elastic stresses in unevenly heated long cylinder are determined. A linear law changes the temperature along a radius of cylinder. General decision for axis symmetrical task of a flat stressed state is used. The general equations for radial, circuit and axial thermal elastic stresses are achieved and their diagrams are drawn.