

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

М.ӘУЭЗОВ атындағы ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК
УНИВЕРСИТЕТІ

«Информатиканы оқытудың әдістемесі мен теориясы» кафедрасы

Құрақбаев Ж.С., Ибрагимов О.М., Махатова А.Х.

ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

Шымкент, 2016

Құрақбаев Ж.С., Ибрагимов О.М., Махатова А.Х. Экономикадағы математикалық модельдеу. Оқу құралы. –Шымкент: ОҚМУ, -2016. -120 б.

Оқу құралында сызықты программалаудың теориялық негіздері және практикада қолдану мәселелері қарастырылған. Онда сызықты программалау есептерін шешу әдістері, яғни экономикалық есептердің негізгі қойылымы, екі айнымалылы есептерді графикалық әдіспен, көп айнымалы есептерді симплекс әдіспен, жасанды базисті симплекс әдіспен шешу сипатталған. Сонымен қатар, сызықты программалаудың қосалқы есебі және көлік есебінің тиімді шешімін табу әдістері қаралған. Оқу құралында осы аталған мәселелер мысалдармен көрнекі түрде сипатталған. Сонымен қатар оқу құралында берілген есептер нұсқалары мен тапсырмалар, оның мазмұнын түсінуге көмектеседі.

Оқу құралы университеттің 5В060200–«Информатика» және 6М060200–«Информатика» мамандығы бойынша оқитын студенттер мен магистранттарға арналған.

Пікір жазғандар: Нысанов Е.А. – М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті «Информатиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасының проф., ф.-м.ғ.д;
Бараев А.Б. – Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты «Информатика» кафедрасының проф., ф.-м.ғ.д;
Ибрагимов Р.И. – Қазақстан инженерлі-педагогикалық Халықтар достығы университеті «Информатика және математика» кафедрасының проф., п.ғ.д.

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік университетінің оқу-әдістемелік кеңесі баспаға ұсынған, хаттама №__«__» _____ 2016 ж.

Мазмұны

Кіріспе.....	4
Негізгі түсініктер	5
1 Қарапайым экономикалық есептердің математикалық модельдерін құру	6
1.1 Шикізатты пайдалану есебі	6
1.2 Тағам құрамы есебі	8
1.3 Өнім шығарудың тиімді нұсқасын таңдау	10
1.4 Кәсіпорынның өндірістік әлеуетінің тиімділігін талдау	11
1.5 Кейбір өндірістік-шаруашылық жағдайлардың қойылымы (пішу, қоспалар, тамақтану, маталар өндіру және т.б. есептер)	11
1.6 Теңсіздіктерді теңдеулермен алмастыру	16
2 Сызықты программалаудың жалпы есебі және оны шешу әдістері	19
2.1 Есепті тұжырымдау	19
2.2 Сызықты программалау есебінің геометриялық интерпретациясы	21
2.3 Сызықты программалау есебін графикалық әдіспен шешу	23
2.3.1 Сызықты программалау есебін графикалық әдіспен екі белгісіз болған жағдайда шешу	28
2.3.2 Сызықты программалау есебін, n және m параметрлері $n - m = 2$ қатынаспен байланысқан жағдайда графикалық әдіспен шешу	36
2.4 Сызықты программалау есебін симплекс әдісімен шешу	39
2.4.1 Тірек жоспарларды құру	39
2.4.2 Тиімді жоспарды іздеу. Тиімділік шарттары	43
2.4.3 Симплекс әдісінің алгоритмі	44
2.5 Есепті жасанды базисті симплекс әдіспен шешу	58
2.6 Сызықты программалауда қосалқылық	68
2.6.1 Симметриялық емес қосалқы есептер	69
2.6.2 Симметриялық қосалқы есептер	75
2.6.3 Қосалқы есептің математикалық моделінің түрлері	77
2.7 Сызықты программалау есебін шешу үшін «Шешімді іздеу» қондырмасынан пайдалану	81
3 Сызықты программалаудың көлік есебі	85
3.1 Көлік есебінің қойылымы және ерекшеліктері	85
3.2 Бастапқы тірек жоспарын құру	89
3.3 Потенциалдар әдісі	95
3.4 Көлік есебінің ашық моделі	104
4 Жеке жұмысқа тапсырмалар	108
Пайдаланылған әдебиеттер	120

Кіріспе

Қазіргі заманғы математика басқа ғылым салаларына қарқынды енуімен сипатталады. Бұл үдеріс математиканың бірқатар бағыттарға бөлінуіне тікелей байланысты. Математика тілі жан-жақты, әмбебап және ол түрлі қоршаған әлемнің абстракты заңдарының объективті көрінісі болып саналады. Математикадан экономикада пайдалану, ең маңызды экономикалық байланыстарды формалды және айқын белгілеуге, экономикалық теория ережелерін дәл және жинақы түрде сипаттауға, түсініктер мен қорытындыларды абстракция дәрежесінде тұжырымдауға мүмкіндік береді.

Төтенше экономикалық есептерді шешуді үш кезеңге бөлуге болады: 1) экономикалық - математикалық модельді құру; 2) математикалық әдістердің бірі арқылы тиімді шешімді табу; 3) практикалық есептерде қолдану. Басқаша айтқанда, бұл модель берілген есептің ерекшеліктерін, сондай-ақ нәтижеге әсер етуі мүмкін шектеулерді қарастыруы тиіс.

Жалпы, алғашқы болып сызықты программалау есебінің қойылымын кеңестік экономист А.Н.Толстой (1930) тасымалдауда ара қашықтықтардың қосындысын барынша азайту үшін тиімді жоспарды құру есебі түрінде ұсынды. 1931 жылы венгр математигі Б.Эгервари «таңдау мәселесі» деп аталатын сызықты программалау есебінің математикалық қойылымын және шешу әдісін қарастырды. Шешу әдісі Венгр әдісі деп аталады. Сызықты программалау есебін жүйелі түрде зерттеу және олардың жалпы шешу әдістерін құру кеңестік ғалым Л.В.Канторович (1939) еңбектерінде бастау алған. Ол аталған есептерді шешу үшін жалпы әдіс (көбейткіштерге жіктеу әдісі) ұсынды. Сонымен қатар Л.В.Канторович 1949 жылы М.К.Гавуринмен бірге көлік есебін шешуде қолданылатын потенциалдар әдісін құрастырды. Кейінгі Л.В.Канторович, В.С.Немчинов, В.В.Новожилов, В.К.Дмитриев, А.Л.Лурье, Е.Е.Слущкий, А.Брудно, А.Г.Аганбегян, Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн және т.б. математиктер мен экономистердің жұмыстарында сызықты және сызықты емес программалаудың математикалық теориясы түрінде дамытылды, ал оның әдістері түрлі экономикалық мәселелерді зерттеуге қолданылды.

Сызықты программалау әдістеріне шетелдік ғалымдардың көптеген еңбектері арналған. В 1941 жылы Хичкок көлік есебін тұжырымдады. Сызықты программалау есептерін шешудің негізгі әдісі, яғни симплекс әдісін 1949 жылы Данциг баспада жариялады. Сызықты және сызықты емес программалаудың әдістері Форд, Фалкерсон, Кун, Лемке, Гасс, Чарнес, Бил және т.б. ғалымдардың жұмыстарында дамыды.

Қазіргі таңда, сызықты программалау әдістері негізінен шешуге қолданылуы мүмкін нақты экономикалық мәселелерді анықтау, сондай-ақ микрокомпьютерде есептерді шешу үшін неғұрлым ыңғайлы алгоритмдерді құру бағытында даму үстінде.

Негізгі түсініктер

Сызықты программалау – белгісіздерге сызықты шектеулер қойылатын, сызықты функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін іздеу және зерттеу әдістері туралы ғылым. Сонымен, сызықты программалау есептері функцияның шартты экстремум есептеріне жатады. Бір қарағанда, бірнеше айнымалылардың сызықты функцияларын шартты экстремумға зерттеу үшін математикалық талдаудың дамыған әдістерін қолдану жеткілікті көрінуі мүмкін. Алайда, олардан пайдалану мүмкін еместігі өте оңай көрінеді.

Шындығында да, $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сызықты функциясын

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

сызықты шарттарда экстремумға зерттеу қажет болсын.

Онда, Z сызықты функция болғандықтан, жалпы жағдайда $\frac{\partial z}{\partial x_j} = C_j$

$(j = 1, 2, \dots, n)$. Бұдан облыстың ішінде төтенше нүктелер кездеспейтіні келіп шығады. Сонымен, шектеулер жүйесі арқылы құрылған сызықты функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері облыстың шекарасында жатады. Сызықтық программалау есептерін шешу үшін, дербес жағдайда осы мәндерді табу үшін арнайы әдістерді құру талап етіледі. Әсіресе, сызықтық программалау есептері экономикада кеңінен таралды, себебі, көптеген экономикалық есептерде кездесетін шамалар арасындағы байланыстарды зерттеу, белгісіздерге қойылатын сызықты шектеулермен сызықты функцияға әкеледі.

1 Қарапайым экономикалық есептердің математикалық модельдерін құру

1.1 Шикізатты пайдалану есебі. Кәсіпорын өнімдердің P_1 , P_2 екі түрін өндіру үшін, шикізаттың үш S_1 , S_2 және S_3 түрлерін пайдаланады. Шикізат қоры, өнім бірлігін өндіруге сарыпталатын шикізат бірлігінің саны, сонымен бірге өнім бірлігінен түсетін пайданың шамасы 1.1-кестеде берілген. Ең үлкен пайда түсетін өнім шығару жоспарын құру қажет.

Сонымен, P_1 өнім бірлігінің санын x_1 арқылы, ал P_2 өнім бірлігінің санын x_2 арқылы белгілейміз. Онда, өнім бірлігін өндіруге сарыпталатын шикізат бірлігінің санын, сонымен бірге шикізат қорын есепке ала отырып, шектеулер жүйесін төмендегі түрде

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases}$$

құрамыз. Жүйе өнімді өндіруге сарыпталатын шикізат бірлігі санының шикізат қорынан аспауы тиіс екендігін көрсетеді. Егер P_1 өнім шығарылмаса, онда $x_1 = 0$, ал керісінше жағдайда $x_1 > 0$.

Кесте 1.1

Шикізат түрі	Шикізат қоры	Өнім бірлігін өндіруге сарыпталатын шикізат бірлігінің саны	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Өнім бірлігінен түсетін пайда, теңге		50	40

P_2 өнім үшін де дәл осылай аламыз. Сонымен, x_1 және x_2 белгісіздеріне теріс таңбалы болмайтындай шектеулер қоямыз: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Шешіліп жатқан есептің мақсаты – өнімді сатудан түсетін ең үлкен пайданы, x_1 және x_2 айнымалылардың функциясы түрінде өрнектейміз. P_1 өнім түрінің x_1 бірлігін және P_2 өнім түрінің x_2 бірлігін сатудан түсетін пайда, сәйкес түрде $50 \cdot x_1$ және $40 \cdot x_2$ теңгеге, ал жалпы пайда $Z = 50x_1 + 40x_2$ теңгеге тең.

Келтірілген шарттарда өнім бірлігінің бөлінбеуі қаралмаған, сондықтан x_1 және x_2 (өнім шығару жоспары) бөлшек сандар болуы да мүмкін. Онда

есептің жоспар нұсқалары шексіз көп болады (x_1 және x_2 мәндері шектеулер жүйесін қанағаттандырады).

Сонымен, Z функциясы максимумға ие болатын x_1 және x_2 -нің теріс емес мәндерін, яғни берілген

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

шектеулерде $Z = 50x_1 + 40x_2$ сызықты функциясының ең үлкен мәнін табу қажет.

Құрылған сызықты функция мақсат функциясы деп аталады және шектеулер жүйесімен бірге қаралып отырған экономикалық есептің математикалық моделін құрайды.

Шикізаттан пайдалану есебін жалпылау үшін n түрлі өнім шығаруда m түрлі шикізаттан пайдаланады деп ұйғарамыз. Онда келесі белгілеулер енгіземіз: S_i ($i=1,2,\dots,m$) - шикізат түрлері; b_i - i -нші шикізат қоры; P_j ($j=1,2,\dots,n$) - өнім түрлері; a_{ij} - j -нші өнім бірлігін шығаруға сарыпталатын i -нші шикізат бірлігінің саны; C_j - j -нші өнім бірлігін сатудан түсетін пайда шамасы. Есептің шарттарын 1.2-кестеге енгіземіз.

Кесте 1.2

Шикізат түрі	Шикізат қоры	j-ші өнім бірлігін шығаруға сарыпталатын i-нші шикізат бірлігінің саны			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Пайда		C_1	C_2	...	C_n

Айталық, x_j - өндірілуі қажет j -нші өнім бірлігінің саны болсын. Онда есептің математикалық моделін мынадай түрде өрнектейміз: $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ сызықты функциясының ең үлкен мәнін төмендегі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad b_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

1.2 Тағам құрамы есебі

Күнделікті бордақылау кезінде әрбір жануар S_1 қоректік заттың 9 бірліктен кем емес, S_2 заттың 8 бірліктен кем емес және S_3 заттың 12 бірліктен кем емес тағам алу қажет. Қоректік затты құрастыру үшін екі жем түрінен пайдаланамыз. Қоректік заттың бірлік санының құрамы, 1 кг әрбір жемнің түрі және 1 кг жемнің бағасы 1.3-кестеде келтірілген.

Кесте 1.3

Қоректік зат	1 кг жемдегі қоректік заттың бірлік саны	
	Жем I	Жем II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Теңгеге шаққанда 1 кг жемнің құны	4	6

Күнделікті қажетті тағам құрамын жасау қажет және оның құны аз болуы тиіс. Математикалық модельді құру үшін, күнделікті тағам құрамындағы I және II жемнің кг-да санын сәйкес x_1 және x_2 арқылы белгілейміз. Онда 1.3-кесте келтірілген мәндерді ескере отырып, күнделікті тағам құрамы тек қана қажетті қоректік заттардың сәйкес бірлік санынан кем емес болған жағдайда ғана қанағаттандырады деп алып, шектеулер жүйесін

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

аламыз. Егер жем I тағам құрамында пайдаланбаса, онда $x_1 = 0$; ал керісінше жағдайда $x_1 > 0$. Сол сияқты, $x_2 \geq 0$ орынды, яғни айнымалылардың мәндері теріс емес шарты орындалады: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Берілген есептің мақсаты - күнделікті тағам құрамының ең төменгі құнына қол жеткізу, сондықтан жалпы тағам құрамының құнын (теңге) $Z = 4x_1 + 6x_2$

сызықты функциясы арқылы өрнектейміз. Есеп көп нұсқалы болып саналады, яғни x_1 және x_2 шексіз көп мәндер жиынын қабылдайды. Осы жиындар ішінен x_1 және x_2 -ні Z функциясы ең кіші мәнді қабылдайтындай етіп таңдау қажет.

Сонымен, $Z = 4x_1 + 6x_2$ сызықты функциясының ең кіші мәнін

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

шектеулерде табу қажет.

Тағам құрамы есебін жалпылау үшін, тағам құрамында m түрлі қоректік заттар b_i ($i=1,2,\dots,m$) бірлік санынан кем емес және n түрлі жемнен пайдаланылады деп аламыз.

Есептің математикалық моделін құру үшін, белгілеулер енгіземіз: a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$), ($j=1,2,\dots,n$) - j -нші жем бірлігі құрамындағы i -нші қоректік заттың саны, C_j - j -нші жем бірлігінің құны; x_j - күнделікті тағам құрамындағы j -нші жем бірлігінің саны.

$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ сызықты функциясының ең кіші мәнін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n), \quad b_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

Жоғарыдағы келтірілген есептер мен олардың математикалық модельдерін қарастыра отырып, егер өндіріс үдерісінде кейбір шикізаттан толық пайдалануды немесе күнделікті тағам құрамында қандайда бір қоректік зат бірлігінің нақты саны қамтылуы тиіс деп талап етсек, онда осы шикізат (қоректік зат) үшін шектеулерді теңдеу түрінде өрнектеуге болатынын байқауға болады.

1.3 Өнім шығарудың тиімді нұсқасын таңдау

Фирма балмұздақтың екі түрін шығарады: сары майлы және шоколадты. Балмұздақты дайындау үшін екі бастапқы өнімнен пайдаланады: сүт және толтырғыштар, сондай-ақ 1 кг балмұздақтың шығыны және тәуліктік қоры 1.4-кестеде берілген.

Кесте 1.4

Бастапқы өнім	1 кг балмұздаққа жұмсалатын бастапқы өнімдер шығыны		Қор, кг
	Сары майлы	Шоколадты	
Сүт	0,8	0,5	400
Толтырғыштар	0,4	0,8	365

Сату нарығын зерттегенде, сары майлы балмұздаққа болған тәуліктік сұраныс шоколадты балмұздақтың сұранысынан 100 кг-нан көп емес екендігін көрсетті. Сонымен қатар, шоколадты балмұздаққа болған сұраныс тәулігіне 350 кг-нан аспайтыны анықталды. Сондай-ақ, 1 кг сары майлы балмұздақтың бөлшек сауда бағасы 16 теңге, ал шоколадты балмұздақтың – 14 теңге. Фирма өнімдерін сатудан түскен пайда ең жоғары болуы үшін, балмұздақтың әрбір түрінен қанша өндірілуі тиіс?

Шешуі. Белгілейміз: x_1 - сары майлы балмұздақ өндірісінің бір тәуліктегі көлемі, кг; x_2 - шоколадты балмұздақ өндірісінің бір тәуліктегі көлемі, кг.

Есептің математикалық моделін құрамыз. Мақсат функциясын

$$L(x) = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

төмендегі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365, \\ x_1 - x_2 \leq 100, \\ x_2 \leq 350, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4 Кәсіпорынның өндірістік әлеуетінің тиімділігін талдау

Кәсіпорын үш өндірістік ресурстарына (шикізат, жабдық, электр энергиясы) ие және екі түрлі тәсілмен өндірісті ұйымдастыра алады. Ресурстардың 1 айлық шығыны және өндірістің әр бір тәсілдегі жалпы ресурстары 1.5-кестеде берілген (шартты бірліктерде).

Кесте 1.5

Өндірістік ресурстар	Жұмыстағы 1 айлық ресурстар шығыны		Жалпы ресурс
	1-тәсілмен	2-тәсілмен	
Шикізат	1	2	4
Жабдық	1	1	3
Электр энергиясы	2	1	8

Кәсіпорын бірінші тәсілмен бір айда 3 мың өнім өндіреді, екінші тәсілмен - 4 мың. Қолда бар ресурстарда өнімдердің ең үлкен өндірісін қамтамасыз ету үшін, кәсіпорын қанша ай осы тәсілдердің әрбіреуімен жұмыс істеуі қажет?

Шешуі. Есептің математикалық моделін құрамыз. Белгілейміз: x_1 – кәсіпорынның бірінші тәсілмен жұмыс уақыты, x_2 – кәсіпорынның екінші тәсілмен жұмыс уақыты. Мақсат функциясын

$$L(x) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

төмендегі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.5 Кейбір өндірістік-шаруашылық жағдайлардың қойылымы (пішу, қоспалар, тамақтану, маталар өндіру және т.б. есептер).

Сызықты программалау есептері нақты экономикалық жағдайларды өндірістік зерттеулерден келіп шығады. Мұндай есептер шектеулі ресурстарды тиімді пайдалану есебі түрінде (пішу есебі, қоспалар, тағам құрамы және т.б.) түсіндіріледі.

Мысал 1. (қоспалар туралы есеп). Стандарт бойынша А-80 автомобиль бензинінің октандық саны 80-дан кем болмауы, ал құрамындағы күкірт 0,3%-дан көп болмауы тиіс. Зауытта мұндай бензинді дайындау үшін төрт компоненттің қоспасынан пайдаланады. Қоспа компоненттерінің ресурстары, өзіндік құны, октандық саны және күкірт құрамы кестеде берілген.

Сипаттама	Автомобиль бензинінің компоненті			
	№1	№2	№3	№4
Октандық саны	68	72	80	90
Күкірт құрамы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурстары, тонна	700	600	500	300
Өзіндік құны, ақша бірлігі/тонна	40	45	60	90

Сонымен, 1000 тонна А-80 бензин өндіру үшін әрбір компоненттен қанша тоннадан жұмсағанда өзіндік құны ең кіші болатынын анықтау қажет.

Шешуі. Бұл есепті шешу үшін оның экономикалық-математикалық түрде тұжырымдаймыз, яғни есептің математикалық моделін құрамыз. Қажетті белгілеулер енгіземіз: айталық, x_j ($j=1,2,3,4$) - нөмірі j компоненттің қоспадағы саны болсын. Онда осы белгілеулерден тиімділік өлшемі - «өзіндік құны ең кіші» есепті аламыз:

$$\min f(X) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

шектеулермен берілген

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \quad (1.5.1)$$

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 * 1000, \quad (1.5.2)$$

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 * 1000, \quad (1.5.3)$$

$$x_1 \leq 700,$$

$$x_2 \leq 600,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_4 \leq 300,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

Функционалдық шектеулер (1.5.1) берілген қоспа санын (1000 т.) алу қажеттілігін көрсетеді. (1.5.2) және (1.5.3) - қоспадағы октандық саны мен күкірт құрамының шектеулері, басқалары - сәйкес ресурстардың (компоненттердің) көлемдеріне шектеулер. Тікелей шектеулер айқын, дегенмен шешу үшін әдісін таңдау үшін маңызды.

Мысал 2. (Шектелген ресурстардан пайдалану). Салынып жатқан жол бөлігінде тас материалдардың 20 мың текше метрін қабылдау қажет. Құрылыс ауданында қоры 8 мың текше метр, 9 мың текше метр және 10 мың текше метрге тең 3 кен орны бар. Тас материалдарды жүктеу үшін 1-ші және 2-нші кен орындарында өнімділігі бір ауысымда 250 текше метр және 3-нші кен орнында 500 текше метрге тең эксковаторлар пайдаланылады.

Сонымен бірге, бұл кен орындары салынып жатқан басқа да бірқатар нысандарды тас материалдармен қамтамасыз етеді. Қаралып жатқан жол бөлігіне тас материалдарын жүктеу үшін, құрылысшылардың қалауы бойынша пайдалану құқығымен, шегі 60 машина-ауысымға тең эксковаторлар бөлінген.

Материалдарды тасуға кететін көліктік шығындар төмендегі көрсеткіштермен сипатталады: 10 мың текше метр материалды тасу үшін 1-ші кен орнынан 1000, 2-ші кен орнынан - 1350, 3-ші кен орнынан 1700 машина – ауысымға қажет. Ең аз көлік шығындарын қамтамасыз ететін тиімді тасымалдау жоспарын табу талап етіледі.

Шешуі. Есептің экономикалық-математикалық моделін тұжырымдаймыз. Өлшем бірлігі ретінде 10 мың текше метр материалдар санын аламыз. x_1 арқылы 1-нші кен орнынан, x_2 арқылы 2-нші кен орнынан және x_3 арқылы 3-нші кен орнынан алынатын материалдарды белгілейміз.

Көлік шығындарының ең азын

$$f(X) = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3$$

төмендегі шектеулермен

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2.0, \quad (1.5.4)$$

$$40x_1 + 40x_2 + 20x_3 \leq 60, \quad (1.5.5)$$

$$0 \leq x_1 \leq 0.8, \quad (1.5.6)$$

$$0 \leq x_2 \leq 0.9, \quad (1.5.7)$$

$$0 \leq x_3 \leq 1.0 \quad (1.5.8)$$

табу қажет.

Жоғарыдағы (1.5.4) шарт материалдарға болған қажеттілікті көрсетеді. Ал (1.5.5) - «эксковаторлардың жұмыс уақыты қоры» ресурстарына шектеу (біз қолда барынан артығын пайдалана алмаймыз). Сол сияқты, (1.5.6)-(1.5.8) шарттар тас материалдарды өндіру, сәйкес кен орындарында материалдар қорының шектелген шарттарында орындалатынын көрсетеді. Алынған есеп - сызықты программалау есебі екендігі түсінікті.

Мысал 3. Кәсіпорын өнімдердің Π_1 және Π_2 түрлерін өндіру үшін шикізаттың C_1 және C_2 екі түрін пайдаланады. Шарттар туралы деректер 1.6-кестеде берілген. Өндіріс жоспарын «ең көп пайда» өлшемі бойынша құру қажет.

Шешуі. Π_1 өнімнің өндіріс көлемін x_1 арқылы және Π_2 өнімнің өндіріс көлемін x_2 арқылы белгілейміз. Осы белгілеулерді ескере отырып, есептің математикалық моделін мынадай түрде жазамыз:

$$\max f(X) = 2x_1 + 3x_2$$

шектеулермен

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 300, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

табу қажет.

Кесте 1.6

Шикізат	Өнім бірлігіне сарыпталатын шикізат шығыны, кг/бірлік		Шикізат саны, кг
	Π_1	Π_2	
C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Пайда, мың теңге/бірлік	2	3	-

Мысал 4. (Ресурстарды тиімді пайдалану есебі). Кәсіпорында төрт түрлі P_1, P_2, P_3, P_4 өнімдерді шығару үшін үш түрлі S_1, S_2, S_3 шикізаттан пайдаланады. Бөлінген шикізат көлемдері, шикізат шығыны деңгейі және әрбір өнімді өндірудегі өнім бірлігінің пайдасы 1.7-кестеде көрсетілген. Ең үлкен пайданы қаматамасыз ететін өнімдерді шығару жоспарын табу қажет.

Ресурстарды тиімді пайдалану есебінің ең үлкен пайда табуға арналған экономикалық-математикалық моделін құрамыз. Белгісіздер ретінде j -нші өнімді шығару көлемі x_j ($j=1,2,3,4$) аламыз.

Кесте 1.7

Шикізат түрі	Шикізат қоры	Өнім түрлері			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Пайда		14	10	14	11

Есептің моделі:

$$f(X) = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \rightarrow \max$$

шектеулерде

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

табу қажет.

Мысал 5. (Мата өндірісін жоспарлау есебі). Фабрика 3 түрлі мата түрін өндіреді деп алайық. Бірінші түрдегі матаның бір тәулікте жоспарланған тапсырмасы 90 м кем емес, сол сияқты, екінші түрдегі матаның тапсырмасы 70 м кем емес және үшінші түрдегі матаның тапсырмасы 60 м кем емес.

Тәуліктік ресурстар: өндірістік жабдықтардың бірлігі - 780, шикізат бірлігі – 850 және электроэнергия бірлігі – 790. Бір метр матаға кететін шығындар 1.8-кестеде келтірілген.

Кесте 1.8

Ресурстар	Маталар		
	I	II	III
Жабдық	2	3	4
Шикізат	1	4	5
Электрэнергия	3	4	2

Матаның 1 метрінің бағасы I түр үшін 80 ақша бірлігіне, II түр үшін 70 ақша бірлігіне және III түр үшін 60 ақша бірлігіне тең. Өнімді өндірудің жалпы құны ең үлкен болуы үшін, әрбір түрдегі матаның қанша метрін шығару қажет екендігін анықтау талап етіледі.

Есептің математикалық моделін құрамыз. Мынадай белгілеулер енгіземіз. Белгісіздер ретінде әр бір түрдегі матаны шығару көлемін аламыз:

x_1 – I түрдегі матаның метрінің саны;

x_2 – II түрдегі матаның метрінің саны;

x_3 – III түрдегі матаның метрінің саны.

$$F(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq T_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_j \geq 0.$$

Қолда бар деректерді есепке ала отырып, моделді мынадай түрге келтіреміз:

$$f(X) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 780, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 850, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 790, \end{cases} \quad \text{ресурстар бойынша шектеулер}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 90, \\ x_2 \geq 70, \\ x_3 \geq 60. \end{cases} \quad \text{жоспарлық тапсырмалар}$$

Сонымен, есептің шартына байланысты шектеулер жүйесі тек қана сызықты теңсіздіктерден емес, сонымен қатар сызықты теңдеулерден де тұрады. n белгісіз бар сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешу кезінде үлкен қиындықтарға тап боламыз. Сондықтан теңсіздіктерді теңдікке түрлендіріп, сызықты теңдеулер жүйесін шешеміз. Мұндай әдіс сызықты программалау есептерін шешуде кеңінен қолданылады.

1.6. Теңсіздіктерді теңдеулермен алмастыру

Төменде n белгісіз бар теңсіздікті қарастырамыз

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b. \quad (1.6.1)$$

Теңсіздікті (1.6.1) теңдікке келтіру үшін, оның сол жағына қандайда бір оң таңбалы шаманы енгіземіз

$$x_{n+1} \geq 0. \quad (1.6.2)$$

Нәтижеде $n + 1$ белгісіз (айнымалы) қатысатын сызықты теңдеуді аламыз:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b. \quad (1.6.3)$$

Теңсіздікті теңдеуге түрлендіретін оң таңбалы $x_{n+1} \geq 0$ айнымалысын қосымша айнымалы деп атаймыз.

Теорема 1.1. (1.6.1) теңсіздіктің әр бір $X = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ шешіміне (1.6.3) теңдеу және (1.6.2) теңсіздіктің жалғыз $Y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ шешімі сәйкес келеді және керісінше, (1.6.3) теңдеу және (1.6.2) теңсіздіктің әр бір $Y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ шешіміне (1.6.1) теңсіздіктің жалғыз $X = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ шешімі сәйкес келеді.

Дәлелдеу. Айталық X - (1.6.1) теңсіздіктің шешімі. Онда

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b.$$

Осы теңсіздіктің сол жақ бөлігін оң жаққа өткізіп және оң жақтағы өрнекті β_{n+1} арқылы белгілеп, яғни

$$0 \leq b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n) = \beta_{n+1},$$

$Y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ шешім (1.6.3) теңдеуді және (1.6.2) теңсіздікті қанағаттандыратын аламыз. Шындығында да $\beta_{n+1} \geq 0$ және

$$\begin{aligned} a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} &= \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n + [b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n)] = b. \end{aligned}$$

Айталық, (1.6.3) теңдеуді және (1.6.2) теңсіздікті Y қанағаттандырады, яғни

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = b \text{ және } \beta_{n+1} \geq 0.$$

Онда, теңдіктің сол жағындағы теріс емес β_{n+1} тастап жіберіп, $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b$ теңсіздігін аламыз. Бұдан, (1.6.1) теңсіздіктің шешімі X екендігі келіп шығады.

Теорема дәлелденді.

Сонымен, егер сызықты программалау есебінің шектеулер жүйесінде теңсіздіктер кездесетін болса, онда теңсіздіктердің әр біріне теріс емес қосымша айнымалы енгізу арқылы, оны теңдеулер жүйесіне түрлендіруге болады. Сонымен қатар, сызықты функцияға әр бірі нөлге тең коэффициентті қосымша айнымалылар енеді. Жоғарыда дәлелденген теореманы пайдалана отырып, кейбір қаралған есептердің математикалық модельдерінде теңсіздіктер жүйесінен теңдеулер жүйесіне өтеміз.

Шикізатты пайдалану есебі. $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n +$
 $+ 0 * x_{n+1} + \dots + 0 * x_{n+m}$ сызықты функциясының

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m) \end{cases}$$

шектеулерде ең үлкен мәнін табу қажет, мұндағы x_{n+i} ($i=1,2,\dots,m$) – қосымша айнымалылар, оларға сызықты функцияның $C_{n+i}=0$ мәніндегі коэффициенттер сәйкес келеді.

Тағам құрамы есебі. Бұл есептің шектеулер жүйесіне кіретін теңсіздіктердің сол бөлігі оң жағынан үлкен немесе тең. Сондықтан, теңсіздіктерден теңдіктерге өту үшін, сол бөліктерден оң таңбалы қосымша айнымалыларды алып тастау қажет.

Сызықты функцияның

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 0 \cdot x_{n+m}$$

шектеулерде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m) \end{cases}$$

ең кіші мәнін табу қажет.

Кез келген шектеулер жүйесіндегі теңдеу мен теңсіздіктің оң бөлігін теріс емес деп санауға болатынын атап өткен жөн, яғни $b_i \geq 0$ ($i=1,2,\dots,m$). Егер қандайда бір k -нші теңдеу немесе теңсіздік үшін $b_k < 0$ болса, онда осы теңдеу немесе теңсіздікті -1 –ге көбейтсек, теңсіздік белгісі қарама-қарсыға өзгереді.

Сонымен, кез келген сызықты программалау есебінің шектеулер жүйесін n айнымалысы бар m сызықты теңдеулер жүйесіне келтіруге болады. Сызықты функция ең кіші немесе ең үлкен мәндерін қабылдайтын x_j ($j=1,2,\dots,n$) айнымалы мәндерін осы жүйенің шешімдер жиыны ішінен іздеу керек. Кез келген сызықты теңдеулер жүйесін шешу, сонымен қатар сызықты программалау есебін шешу әдістері n -өлшемді векторлық кеңістіктің түсініктеріне негізделеді.

2 Сызықты программалаудың жалпы есебі және оны шешу әдістері

2.1 Есепті тұжырымдау

Сызықты функция

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (2.1.1)$$

және сызықты шектеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.3)$$

берілген, мұндағы a_{ij} , b_i және C_j - берілген тұрақты шамалар.

Сызықты (2.1.1) функция ең кіші мәнге ие болатын және (2.1.2) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын x_1, x_2, \dots, x_n теріс емес мәндерін табу қажет.

Жоғарыда айтылғандай, (2.1.2) шектеулер жүйесінде барлық b_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) теріс емес деп санауға болады. Жалпы есеп бірнеше жазба қалыбына ие.

Векторлық жазба қалыбы. Сызықты $Z = CX$ функцияның

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0, \quad X \geq 0 \quad (2.1.4)$$

шектеулерде ең кіші мәнін табу қажет, мұндағы $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; CX - скалярлық көбейтінді; векторлар

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

сәйкес белгісіз және еркін мүшелердегі коэффициенттерден тұрады.

Матрицалық жазба қалыбы. Сызықты $Z = CX$ функцияның

$$AX = A_0, \quad X \geq 0,$$

шектеулерде ең кіші мәнін табу қажет, мұндағы $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - матрица-қатар; $A = (a_{ij})$ - жүйе матрицасы;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матрица-баған}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{матрица-баған}.$$

Жинақтау белгісі арқылы жазба. Сызықты $Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$ функцияның

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

шектеулерде ең кіші мәнін табу қажет.

Анықтама 1. Сызықты программалау есебінің мүмкін шешімі немесе жоспары деп, (2.1.2) және (2.1.3) шарттарды қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторды айтады.

Анықтама 2. Егер (2.1.4) өрнегіне енетін, x_i коэффициенттері оң таңбалы, A_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) векторы сызықты тәуелсіз болса, онда $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ жоспарды тірек жоспары деп атаймыз.

A_i векторы m -өлшемді болғандықтан тірек жоспарының анықтамасынан оның оң таңбалы компоненттері m -нен үлкен болмайтыны келіп шығады.

Анықтама 3. Егер тірек жоспары m оң таңбалы компоненттерден тұратын болса, онда ол нұқсанды емес, ал керісінше жағдайда, тірек жоспары нұқсанды деп аталады

Анықтама 4. Сызықты программалау есебінің тиімді шешімі немесе тиімді жоспары деп, сызықты функция ең кіші (ең үлкен) мән қабылдайтын жоспарды айтады.

Бұдан кейін сызықты программалау есебінің шешімін табуда, сызықты функцияның ең кіші мәнін іздеумен айналысамыз. Ал, сызықты функцияның ең үлкен мәнін табу қажет болған жағдайда, сызықты функцияның таңбасын қарама-қарсыға ауыстырып, оның ең кіші мәнін табамыз. Табылған ең кіші мәнің таңбасын қарама-қарсыға ауыстырып, бастапқы сызықты функцияның ең үлкен мәнін анықтаймыз. Сызықты программалау есебінің шешімінің қасиеттері дөңес жиындардың қасиеттерімен тығыз байланысты.

2.2 Сызықты программалау есебінің геометриялық интерпретациясы

Сызықты программалау есебін, шектеулер жүйесі теңсіздік түрінде берілген жағдайда қарастырайық.

Сызықты функцияның

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (2.2.1)$$

ең кіші мәнін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.2.3)$$

шектеулерде табу қажет. (2.2.2) және (2.2.3) шектеулерді қанағаттандыратын x_1, x_2, \dots, x_n сандар жиыны шешім деп аталады. Егер (2.2.2) теңсіздіктер жүйесі (2.2.3) шарттарда кем дегенде бір шешімге ие болса, онда ол үйлесімді деп, ал кері жағдайда, үйлесімсіз аталады

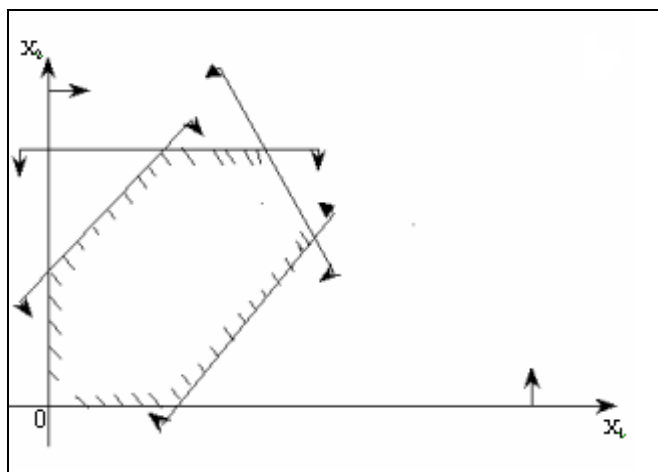
Ox_1x_2 жазықтығында үйлесімді сызықты теңсіздіктер жүйесін қарастырайық.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Жүйе (2.2.2) – (2.2.3) жүйеге $n=2$ қойғанда келіп шығады. Бұл жүйенің әрбір теңсіздігі геометриялық түрде $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i=1,2,\dots,m$) сызықпен шектелген жартылай жазықтықты анықтайды. Теріс еместік шарттары жартылай жазықтықтың сәйкес шекаралық $x_1=0, x_2=0$ сызықтарын анықтайды.

Жүйе үйлесімді, сондықтан жартылай жазықтықтар, дөңес жиындар сияқты қиылысып, дөңес жиынды жалпы бөлімді құрайды және координаталары берілген жүйенің шешімі болып табылатын нүктелердің жинағынан тұрады (2.1-сурет). Осы нүктелердің жинағын (шешімін)

шешімдер көпбұрышы деп атаймыз. Ол нүкте, кесінді, сәуле, көпбұрыш немесе шектелмеген көпбұрышты облыс болуы мүмкін.



Сурет 2.1 - Шешімдер көпбұрышы

Егер (2.2.2) – (2.2.3) шектеулер жүйесінде $n = 3$ болса, онда әрбір теңсіздік геометриялық түрде үш өлшемді кеңістіктің шекаралық жазықтығы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) жартылай кеңістікті, ал теріс еместік шарттары – шекаралық жазықтығы сәйкес $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) жартылай кеңістікті құрайды.

Егер шектеулер жүйесі үйлесімді болса, онда осы жартылай кеңістіктер, дөңес жиындар сияқты қиылысып, үш өлшемді кеңістікте шешімдер көпжағы деп аталатын жалпы бөлімді құрайды. Шешімдер көпжағы нүкте, кесінді, сәуле, көпбұрыш, көп жақ немесе шектелмеген көп жақты облыс болуы мүмкін.

Егер (2.2.2) - (2.2.3) шектеулер жүйесінде $n > 3$ болса, онда әрбір теңсіздік n -өлшемді кеңістіктің шекаралық гипер жазықтығы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) жартылай кеңістікті, ал теріс еместік шарттары - шекаралық гипер жазықтығы $x_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) жартылай кеңістікті құрайды.

Егер шектеулер жүйесі үйлесімді болса, онда жоғарыдағы үш өлшемді кеңістік сияқты, n -өлшемді кеңістікте шешімдер көпжағы деп аталатын жалпы бөлімді құрайды, себебі оның әрбір нүктесінің координаты шешім болып саналады.

Сонымен, сызықты программалау есебі геометриялық түрде шешімдер көпжағының координаталарын, яғни сызықты функцияның ең кіші мәнін қамтамасыз ететін нүктелерді табу, сондай-ақ, шешімдер көпжағының барлық нүктелері мүмкін шешімдер болып саналады.

2.3 Сызықты программалау есебін графикалық әдіспен шешу

Қолдану облысы. Графикалық әдіс сызықты программалау есебінің геометриялық интерпретациясына негізделеді және негізінен 2-өлшемді кеңістіктегі есептерді, тек кейбір жағдайда ғана 3-өлшемді кеңістіктегі есептерді шешуде қолданылады. Себебі, жартылай кеңістіктердің қиылысуы нәтижесінде пайда болатын шешімдер көпжағын құру мәселесі өте қиын. Ал, 3-өлшемнен артық кеңістіктегі есептерді графикалық түрде бейнелеу мүмкін емес.

Айталық, сызықты программалау есебі 2-өлшемді кеңістікте берілген болсын, яғни шектеулер екі айнымалыны қамтиды.

Функцияның ең кіші мәнін

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \quad (2.3.1)$$

шектеулерде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

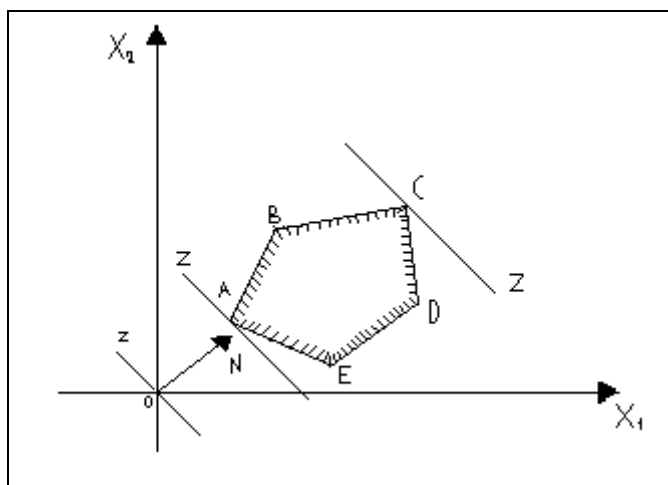
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.3.3)$$

табу қажет.

(2.3.2) жүйе (2.3.3) шарттарда үйлесімді және оның шешімдер көпбұрышы шектеулі деп болжайық. Жоғарыда көрсетілгендей, (2.3.2) және (2.3.3) теңсіздіктердің әр бірі шекаралық сызықты $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. ($i = 1, 2, \dots, m$), $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ жартылай жазықтықты анықтайды. Сызықты (2.3.1) функция Z -тің тіркелген мәндерінде түзу теңдеуі болып саналады: $C_1x_1 + C_2x_2 = const$. (2.3.1) сызықты функция графигін және (2.3.2) шектеулер жүйесінің шешімдер көпбұрышын $Z = 0$ болғанда саламыз (2.2-сурет).

Онда қойылған сызықты программалау есебіне мынадай интерпретация беруге болады. Z функциясы ең кіші мәнді қабылдайтын және $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ түзу сызығы тірек жоспар болатын шешімдер көпбұрышының нүктесін табу қажет. $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ мәні $N = (C_1, C_2)$ векторы бағытында өседі, сондықтан $Z = 0$ түзу сызығын өзіне-өзі параллель болатындай N векторы бағытында жылжытамыз.

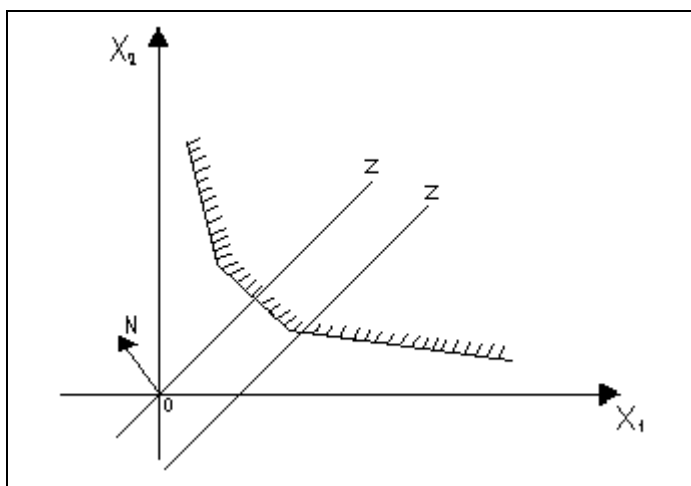
2.2-суреттен түзу сызық шешімдер көпбұрышының екі нүктесінде (A, C нүктелерде) тірек жоспары болатыны келіп шығады, дегенмен ең кіші мәнді A нүктесінде қабылдайды. AB және AE түзу сызықтарының теңдеулер жүйесін шешіп, $A(x_1, x_2)$ нүктесінің координаталарын табамыз.



Сурет 2.2 - Сызықты функция графигі және шешімдер көпбұрышы

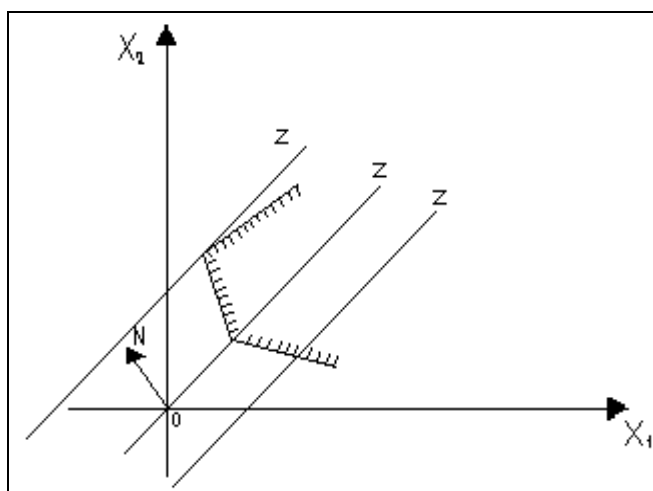
Егер шешімдер көпбұрышы шексіз көпбұрышты облыс құратын болса, онда төмендегі екі жағдай болуы мүмкін.

Жағдай 1. Түзу $C_1x_1 + C_2x_2 = const$, N вектор бағытында немесе қарама-қарсы бағытта жылжи отырып, үнемі шешімдер көпбұрышымен қиылысады және еш қандай нүктеде оған тірек жоспар бола алмайды. Мұндай жағдайда сызықты функция шешімдер көпбұрышында төменнен де, жоғарыдан да шектелмеген (2.3-сурет).

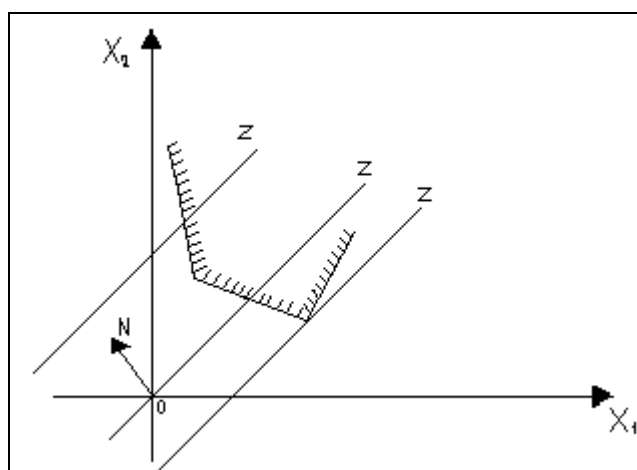


Сурет 2.3 - Сызықты функция шешімдер көпбұрышында (1-жағдай)

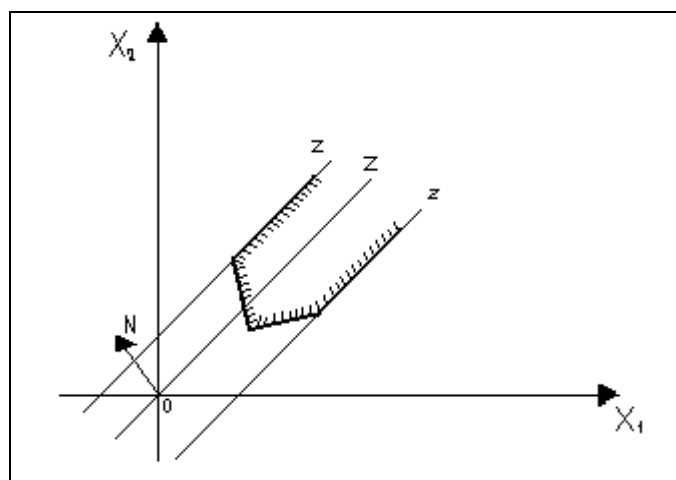
Жағдай 2. Түзу $C_1x_1 + C_2x_2 = const$, N вектор бағытында немесе қарама-қарсы бағытта жылжи отырып, шешімдер көпбұрышымен қиылысады және оған тірек жоспар құрады. Онда облыс түріне байланысты сызықты функция жоғарыдан шектелген және төменнен шектелмеген (сурет 2.4, а), жоғарыдан шектелмеген және төменнен шектелмеген (сурет 2.4, б), жоғарыдан да, төменнен де шектелген (сурет 2.4, в) болады.



а) жоғарыдан шектелген, төменнен шектелмеген



б) жоғарыдан шектелмеген, төменнен шектелген



в) жоғарыдан да, төменнен де шектелген

Сурет 2.4 - Сызықты функция шешімдер көпбұрышында (2-жағдай)

Графикалық әдіспен есеп шешуге мысалдар

Екі белгісіз қатысқан жағдайда теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысын табу

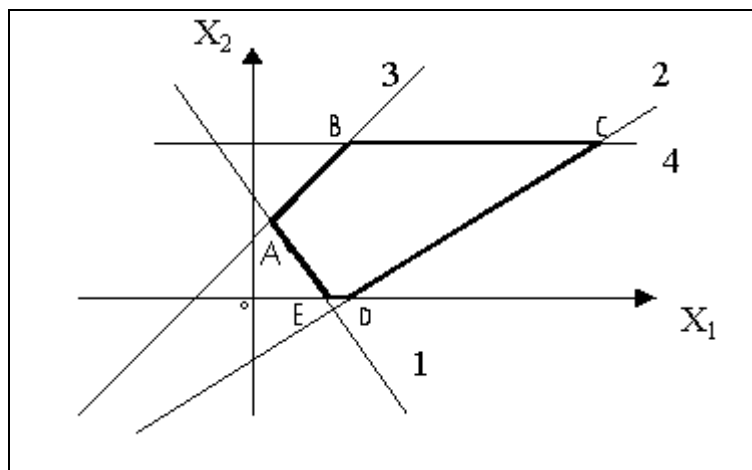
Мысал 1. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысын табыңыз

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

Шешуі. Теңсіздік белгісін теңдік белгісіне ауыстырып, төрт түзудің теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9, & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 2, & (3) \\ x_2 = 5. & (4) \end{cases}$$

Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысы ABCDE көпбұрышын құрайды (2.5-сурет).



Сурет 2.5 - ABCDE көпбұрышы

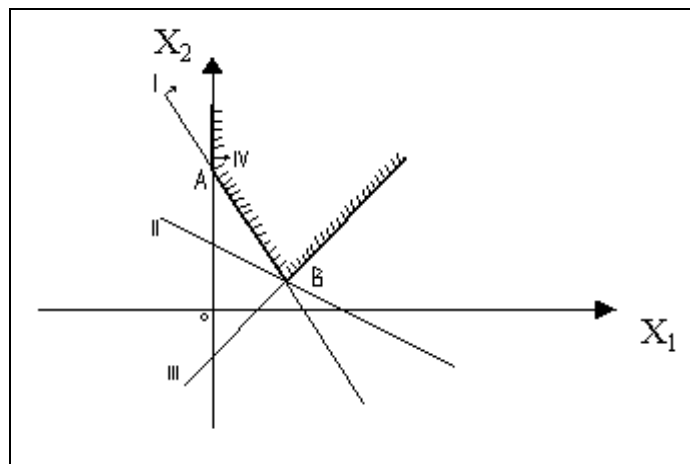
Мысал 2. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысын табыңыз

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Шешуі. Теңсіздік белгісін теңдік белгісіне ауыстырып, төрт түзудің теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 4, & (2) \\ x_1 - x_2 = 2, & (3) \\ x_1 = 0. & (4) \end{cases}$$

Бұл теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысы шектелмеген дөңес фигура болады (2.6-сурет).



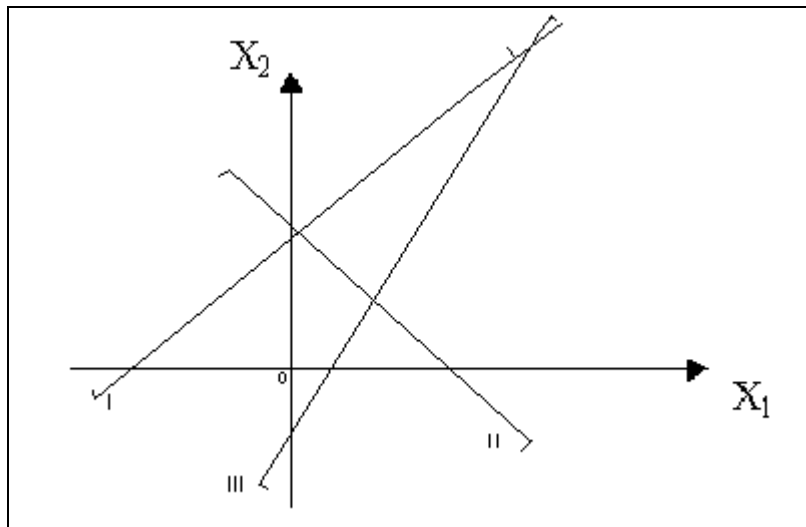
Сурет 2.6 - шектелмеген дөңес фигура

Мысал 3. Берілген теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысын табыңыз

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Шешуі. Теңсіздік белгісін теңдік белгісіне ауыстырып, үш түзудің теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10, & (1) \\ x_1 + x_2 = 5, & (2) \\ 2x_1 - x_2 = 4. & (3) \end{cases}$$



Сурет 2.7 - Теңсіздіктер жүйесі үйлесімсіз

Бұл жағдайда барлық үш жартылай жазықтық үшін жалпы болатын бірде-бір нүкте табылмайды. Бұдан берілген теңсіздіктер жүйесінің шешімі жоқ (үйлесімсіз) екендігі келіп шығады (2.7-сурет).

2.3.1 Сызықты программалау есебін графикалық әдіспен екі белгісіз болған жағдайда шешу

Сызықты программалау есебі екі x_1 және x_2 белгісіз үшін, негізінде жоғарыда қаралған түсініктер жататын графикалық әдіспен өте оңай шешіледі.

Айталық, жүйе екі x_1 және x_2 белгісіз кездесетін m сызықты теңсіздіктерге

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geq 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

сонымен қатар сызықты қалыпқа ие болсын:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2. \quad (2.3.5)$$

Жүйенің (2.3.4) барлық оң таңбалы шешімдері ішінен

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.3.6)$$

сызықты қалып (2.3.5) ең кіші мән қабылдайтын шешімін таңдап алу қажет.

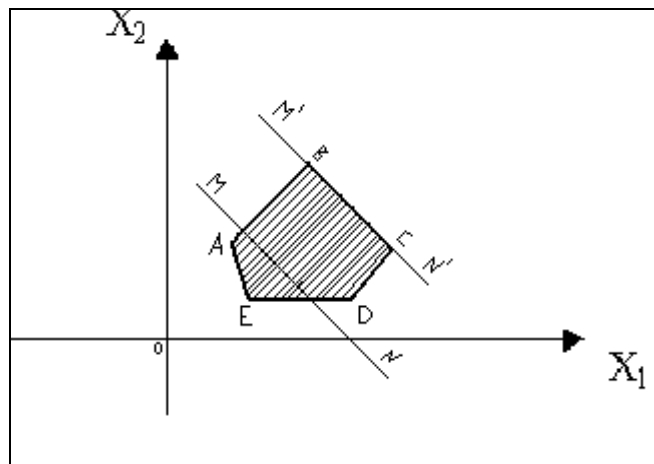
Жүйенің (2.3.4), (2.3.6) шешімдер облысы жазықтықта қандай-да бір көпбұрышты облыстан тұрады.

Z үшін өрнекті қандай-да бір тұрақтыға теңейміз

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = c \quad (2.3.7)$$

Теңдеу (2.3.7) жазықтықта түзу сызықты анықтайды. Сызықтың нүктелерінде функция тек қана бір тұрақты мәнді, атап айтқанда c -ны қабылдайды. Мұндай түзу сызық c мәніне сәйкес Z функциясының деңгей сызығы деп аталады. Егер Z үшін басқа тұрақтыны қабылдасақ, онда сәйкес басқа деңгей сызығын аламыз.

Геометриялық түрде (2.3.7) теңдігі параллель сызықтар тобын құрайды. MN түзу сызығын өзіне-өзі параллель болатындай, Z өсетін бағытта (егер сызықты қалыптың ең кіші мәнін табу қажет болса, онда Z кемитін бағытта) жылжытамыз. Мұндайда екі жағдай орынды болуы мүмкін. Параллель жылжыту түзу сызықты көпбұрыштың бір төбесі ортақ нүкте болатын жағдайға әкеледі. B нүктесінің координаталары (2.3.5) функцияның ең үлкен мәнін береді. Түзу сызық көпбұрыштың бір қабырғасына параллель болатын жағдай да туындауы мүмкін. Мұндайда экстремум шарты көпбұрыштың сәйкес BC қабырғасының барлық нүктелерінде орындалады (2.8-сурет).



Сурет 2.8 - Түзу сызық көпбұрыштың бір қабырғасына параллель болатын жағдай

Мысал 1. (Графикалық әдіспен шешу). $\min Z = 2x_1 - 10x_2$ мынадай шектеулерде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

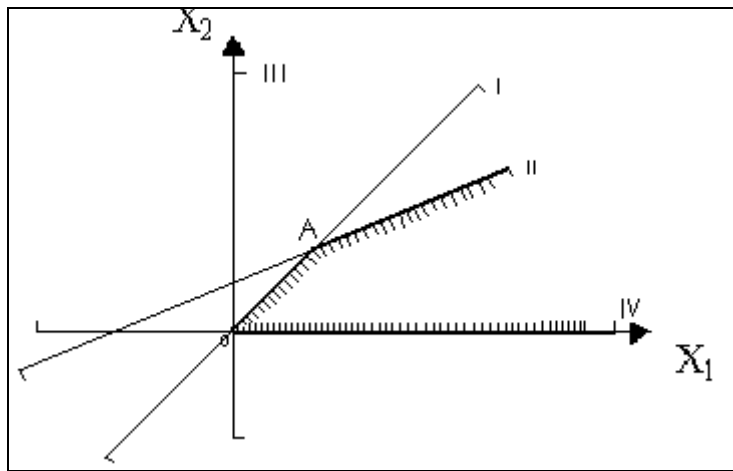
табу қажет.

Шешуі. Теңсіздік белгісін теңдік белгісіне ауыстырып, төрт түзудің теңдеулерін аламыз:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, & (1) \\ x_1 - 5x_2 = -5, & (2) \\ x_1 = 0, & (3) \\ x_2 = 0. & (4) \end{cases}$$

Бұл теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысы шектелмеген фигура болады (2.9-сурет). $O(0;0)$, $A(x_1, x_2)$ нүктелері алынған шешімдер облысының төбелері болып табылады. $A(x_1, x_2)$ нүктесі екі түзу сызықтың қиылысу нүктесі болғандықтан, оның координаталарын табу үшін төмендегі жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 5x_2 = -5, \end{cases} \quad x_1 = x_2 = 5/4, \quad A(5/4; 5/4)$$



Сурет 2.9 - Шешімдер облысы шектелмеген фигура

Z функциясының мәндерін $O(0;0)$, $A(5/4; 5/4)$ нүктелерінде есептейміз:

$$Z_A = 2 * \frac{5}{4} + (-10) * \frac{5}{4} = \frac{5}{2} - \frac{25}{2} = 2,5 - 12,5 = -10,$$

$$Z_0 = 2 * 0 - 10 * 0 = 0,$$

$$Z_{\min} = -10.$$

Есеп 1. Кәсіпорында өндірістік қуаттардың (сағаттарда) 4 түрі мынадай көлемде бар: $M_1=16$, $M_2=10$, $M_3=6$, $M_4=7$. Қуат шығындарының нормасы №1 өнім бірлігі үшін: 2, 1, 0, 1; №2 өнім бірлігі үшін: 1, 1, 1, 0. Сонымен бірге, №1 өнім бірлігінен түсетін пайда 3 теңге, №2 өнім бірлігінен - 4 теңге. Кәсіпорынның барлық өнімдерді сатудан табысы ең көп болатын, екі өнім түрін өндіру жоспарын жасау қажет.

Шешуі. Кәсіпорынға ең көп пайда әкелетін өндірістегі №1 өнімді x_1 арқылы, ал №2 өнімді x_2 арқылы белгілейміз. Кәсіпорынның №1 өнім бірлігінің пайдасы 3 теңге болғандықтан, x_1 өнім бірлігінен түсетін пайдасы $3x_1$ болады. Сол сияқты, №2 өнім бірлігінің пайдасы 4 теңге болғандықтан, x_2 өнім бірлігінен түсетін пайдасы $4x_2$ болады. Сонымен, жалпы пайда $Z = 3x_1 + 4x_2$ сызықты қалыбымен беріледі.

Жалпы, x_1 және x_2 айнымалылардың мәндері еркін бола алмайды. Біріншіден, x_1 және x_2 теріс болмауы керек. Екіншіден, №1 және №2 өнімдерді өндіру үшін қажетті уақыт, қол жетімді қуат сағаттарынан аспауы қажет. Әрбір №1 бірлікке M_1 қуат түрінен 2 сағат, M_2 қуаттан 1 сағат және M_4 қуаттан 1 сағат кетеді. Онда №1 өнімнің x_1 бірлігіне M_1 қуаттан $2x_1$ сағат, M_2 қуаттан $1x_1$ сағат және M_4 қуаттан $1x_1$ сағат уақыт жұмсалады. Дәл осылай, №2 өнім өндіруге M_1 қуаттан $1x_2$ сағат, M_2 қуаттан $1x_2$ сағат және M_3 қуаттан $1x_2$ сағат уақыт жұмсалады.

Қол жетімді өндірістік қуаттар (сағаттарда) шектелген, ал №1 және №2 өнімдерді өндіру уақыты жоспарланған уақыттан аспауы тиіс болғандықтан, шектеулерді төмендегі түрде аламыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 7. \end{cases}$$

Сонымен, төмендегі есепке келеміз: $Z = 3x_1 + 4x_2$ сызықты қалыптың ең үлкен мәнін төмендегі шектеулерде

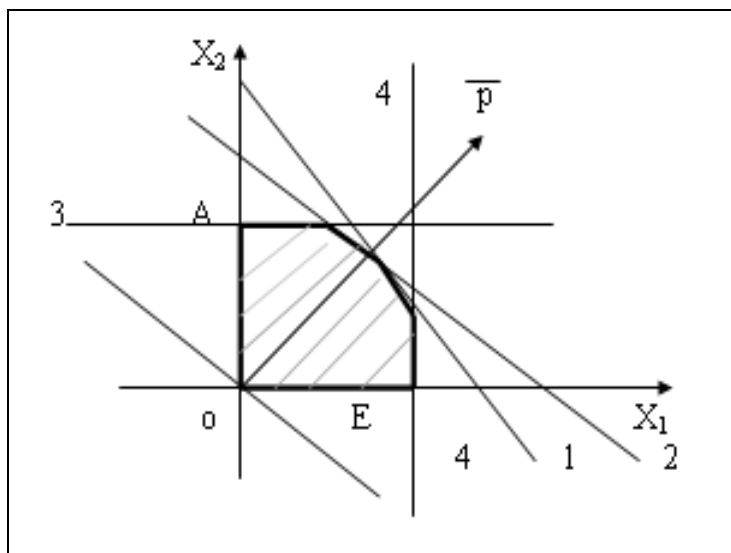
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16, & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 10, & (2) \\ x_2 \leq 6, & (3) \\ x_1 \leq 7, & (4) \\ x_1 \geq 0, & (5) \\ x_2 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

табу қажет.

Қойылған есепті шешу үшін, теңсіздіктер жүйесіне сәйкес, дөңес көпбұрышты құрамыз. Осы мақсатта $x_1 O x_2$ жазықтығында түзу сызықтар сызамыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 16, \\ x_1 + x_2 = 10, \\ x_2 = 6, \\ x_1 = 7. \end{cases}$$

Олар берілген теңсіздіктер жүйесі шешімінің көпбұрышы болып табылатын $OABCDE$ дөңес алты бұрышын, $x_1 = 0$ және $x_2 = 0$ координата өстерімен бірге құрайды (2.10-сурет). Көпбұрыштың ішінде немесе қабырғаларында жататын әрбір (x_1, x_2) нүкте қандай-да бір шешім болып табылады.



Сурет 2.10 - $OABCDE$ дөңес алты бұрышы

Өнім өндірудің тиімді шешімін немесе тиімді жоспарын табу үшін $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ түзу сызығын сызу керек. Теңдеудің сол жақ бөлігі Z сызықты қалыппен сәйкес келеді, сондықтан ол жалпы пайданы сипаттайды.

Ал $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ нөлге тең болғандықтан, түзу сызық (деңгей сызығы) әрекетсіздік жоспарына сәйкес келеді. Шындығында да, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ нүктелер түзу сызықты қанағаттандырады. Дегенмен, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ теңдіктер өнім өндірілмейтінін, сондықтан жүзеге аспайтынын білдіреді. Егер түзу сызықты өзіне-өзі параллель болатындай сызықты қалыптың максималды өсу бағытында жылжытсақ, онда $Z = 3x_1 + 4x_2$, дөңес $OABCDE$ алтыбұрыштың B төбесінде ең үлкен мәніне жетеді. Осылайша, B нүктесі сызықты қалыптың ең үлкен мәнге ие болатын нүктесі болып табылады. B нүктесінің координаталарын табу үшін

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_2 = 6, \end{cases} \quad \begin{matrix} x_2 = 6 \\ x_1 = 4 \end{matrix} \quad B(4, 6)$$

жүйені шешу жетерлі.

Кәсіпорын ең үлкен табысты №1 түрдегі өнімді $x_1 = 4$ бірлік, ал №2 түрдегі өнімді $x_2 = 6$ бірлік өндіргенде табады. $Z = 3 * 4 + 4 * 6 = 36$ теңге.

Графикалық әдіспен шикізаттан пайдалану және тағам құрамын құру есептерін шешеміз. Олардың шарттары 1.1 және 1.2-де келтірілген.

Шикізаттан пайдалану есебі. Сызықты $Z = 50x_1 + 40x_2$ функцияның ең үлкен мәнін төмендегі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

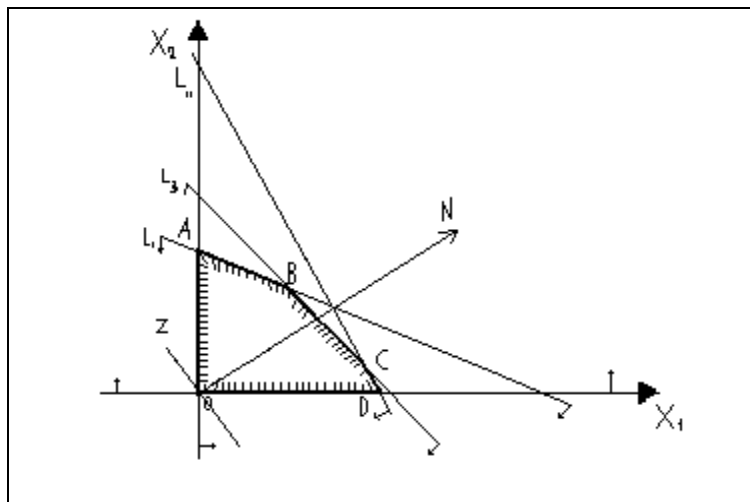
Шешуі. Шешімдер көпбұрышын құрамыз (2.11-сурет). Ол үшін $x_1 O x_2$ координаталар жүйесіндегі жазықтықта шекаралық түзу сызықтарды бейнелейміз

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20, & (L_1) \\ 8x_1 + 5x_2 = 40, & (L_2) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30, & (L_3) \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Қандайда бір нүктені, мысалы, координата басын алып, теңсіздіктер сәйкес қандай жартылай жазықтықтарды белгілейтінін анықтаймыз (бұл жартылай жазықтықтар 2.11-суретте жебелермен көрсетілген). Аталған есептің шешімдер көпбұрышы $OABCD$ бесбұрышы болып табылады.

$50x_1 + 40x_2 = 0$ түзу сызығын салу үшін $N = (50; 40) = 10 * (5; 4)$ радиус – векторын сызамыз және O нүктесі арқылы, оған перпендикуляр түзу сызық

жүргіземіз. Салынған $Z=0$ түзу сызықты өзіне параллель N векторы бағытында жылжытамыз.



Сурет 2.11 - $OABCD$ бесбұрышы

Осы 2.11-суреттен Z функциясы ең үлкен мәнді қабылдайтын, шешімдер көпбұрышына тірек болатын сызық C нүктесінде жататыны келіп шығады. C нүктесі L_2 және L_3 түзу сызықтары қиылысында жатады. Оның координаталарын анықтау үшін

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін шешеміз.

Есептің тиімді жоспары: $x_1 = 90/23 \approx 3,9$; $x_2 = 40/23 \approx 1,7$. x_1 және x_2 мәндерін сызықты функцияға қойып, $Z_{\max} = 50 \cdot 3,9 + 40 \cdot 1,7 \approx 263$ аламыз.

Сонымен, ең үлкен табысты 263 теңге мөлшерінде алу үшін, P_1 өнімді 3,9 бірлік және P_2 өнімді 1,7 бірлік өндіруді жоспарлау қажет.

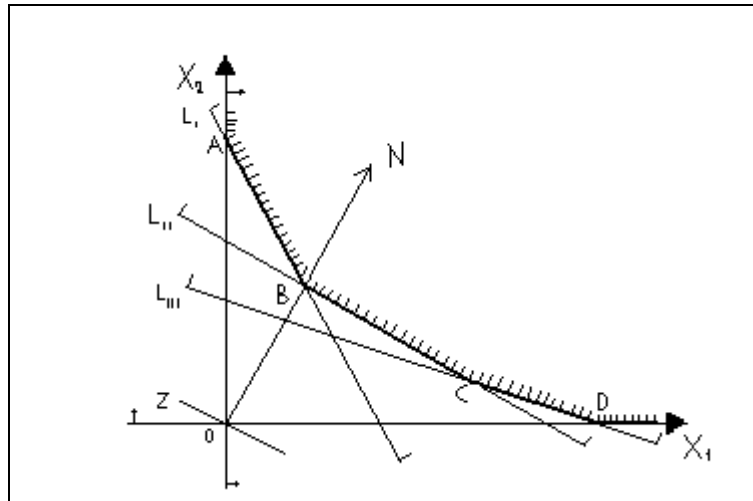
Тағам құрамын құру есебі. Сызықты $Z = 4x_1 + 6x_2$ функцияның ең кіші мәнін төмендегі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Шешуі. Шешімдер көпбұрышын құрамыз (2.12-сурет). Ол үшін $x_1 O x_2$ координаталар жүйесіндегі жазықтықта шекаралық түзу сызықтарды бейнелейміз

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, & (L_1) \\ x_1 + 2x_2 = 8, & (L_2) \\ x_1 + 6x_2 = 12, & (L_3) \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = 0$$

және шекаралық түзу сызықтарға сәйкес қандай теңсіздіктер қандай жартылай жазықтықты белгілейтінін анықтаймыз. Нәтижеде бұрыштары A , B , C , D нүктелерде жататын шексіз көпбұрышты облысты аламыз.



Сурет 2.12 - Бұрыштары A , B , C , D нүктелерде жататын шексіз көпбұрыш

$N=(4; 6)$ векторын және $4x_1 + 6x_2 = 0$ (Z) түзу сызығын саламыз. Z түзу сызығын өзіне параллель N векторы бағытында жылжытамыз. 2.12-суреттен түзу сызық шешімдер көпбұрышына B бұрыштық нүктесінде алғашқы жанасудан оған қатысты тірек болатыны келіп шығады. Егер түзу сызықты N векторы бағытында одан әрі жылжытсақ, онда сызықты функцияның мәні көпбұрышта арта түседі, демек, B нүктесінде сызықты функция ең кіші мәнді қабылдайды. B нүктесі L_1 және L_2 түзу сызықтарының қиылысында жатады. Оның координаталарын анықтау үшін

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін шешеміз. Жүйеден $x_1=2$; $x_2=3$ екенін табамыз. Табылған мәндерді сызықты функцияға қойсақ, $Z_{\min}=4*2+6*3=8+18=26$ аламыз. Сонымен, ең аз шығынды (күніне 26 теңге) қамтамасыз ету үшін, бір тәуліктегі тағам құрамы 1-ші түрдегі жемнен 2 кг және 2-ші түрден 3 кг құрайды.

2.3.2 Сызықты программалау есебін, n және m параметрлері $n - m = 2$ қатынаспен байланысқан жағдайда графикалық әдіспен шешу

Жалпы, егер n белгісізден және m сызықты тәуелсіз теңдеулерден тұратын шектеулер жүйесінде, n және m өзара $n - m = 2$ қатынаспен байланысқан болса, онда сызықты программалау есебін графикалық әдіспен шешу мүмкін. Айталық, сызықты программалау есебі қойылған болсын.

Сызықты $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ функциясының ең кіші мәнін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n),$$

шектеулерде табу қажет, мұндағы барлық теңдеулер сызықты тәуелсіз және $n - m = 2$ қатынас орынды.

Жордан – Гаусс әдісін қолданып, m жою амалын орындаймыз. Нәтижеде базистік белгісіздер ретінде, мысалы, m алғашқы x_1, x_2, \dots, x_m белгісіздер, ал еркін белгісіздер ретінде - x_{m+1} және x_n соңғы екеуі қалады, яғни шектеулер жүйесі мынадай түрге келеді:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Түрленген теңдеулер жүйесінің көмегінде сызықты функцияны тек қана еркін белгісіздер арқылы өрнектейміз, және барлық базистік белгісіздердің теріс емес $x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,m)$ екендігін ескере отырып, теңсіздіктер түрінде өрнектелген шектеулер жүйесіне өтуде оларды тастап жібереміз. Сонымен, ең соңында, мынадай есепті аламыз.

Сызықты $Z = C'_{m+1}x_{m+1} + C'_nx_n$ функциясының ең кіші мәнін

$$\begin{cases} a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1, \\ a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n \leq b'_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m, \end{cases}$$

$$x_{m+1} \geq 0, \quad x_n \geq 0.$$

шектеулерде табу қажет.

Түрленген есепте екі белгісіз бар. Оны графикалық әдіспен шешіп, x_{m+1} тиімді мәнді және x_n -ді табамыз, сонан соң, оларды (2.3.9) қойып, x_1, x_2, \dots, x_m тиімді мәнді табамыз.

Мысал. Графикалық әдіспен сызықты программалау есебінің тиімді жоспарын, яғни $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ сызықты функция

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \end{cases}$$

шектеулерде жететін ең үлкен мәнін табу қажет.

Шешуі. Жордан – Гаусс әдісін қолдана отырып, x_1, x_2, x_3 белгісіздерді толық жоямыз. Нәтижеде

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases} \quad (2.3.10)$$

жүйеге келеміз. Бұдан

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - x_4 + 3x_5, \\ x_2 &= 70 - 7x_4 - 10x_5, \\ x_3 &= 20 + 4x_4 - 5x_5. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Осы мәндерді сызықты функцияға қоямыз және (2.3.10) жүйеде базистік айнымалыларды тастап жіберіп, тек қана x_4 және x_5 еркін белгісіздер арқылы өрнектелетін есепті аламыз: сызықты $Z = 6x_4 + 15x_5 - 38$ функциясының ең үлкен мәнін

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20, \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

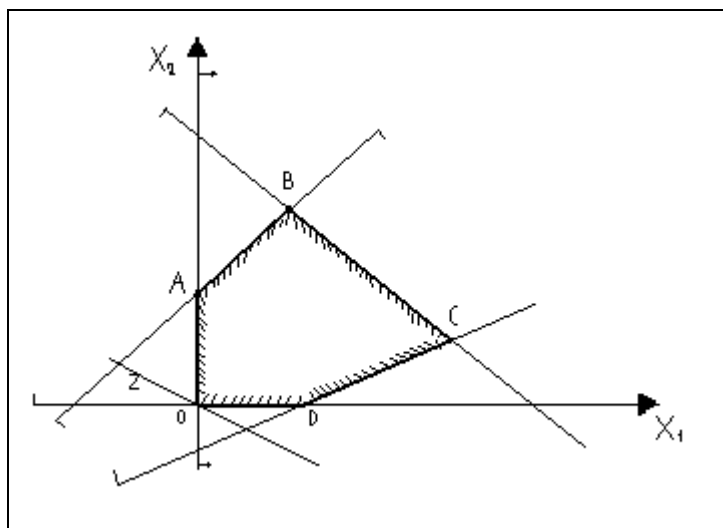
шектеулерде табу қажет.

Шешімдер көпбұрышын және сызықты функцияны $x_4 O x_5$ координаталар жүйесінде құрамыз (2.13-сурет). Осы суреттен, сызықты функция ең үлкен мәнін 2-ші жән 3-ші түзу сызықтардың қиылысуында жататын B бұрыштық нүктесінде қабылдайды деп қорытындылаймыз.

Жүйені

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

шешу нәтижесінде табамыз: $x_4=2$, $x_5=28/5$. Функцияның ең үлкен мәні $Z_{\max} = -38+12+84=58$. Бастапқы есептің тиімді жоспарын іздеу үшін табылған x_4 және x_5 мәндерді (2.3.11) өрнекке қоямыз. Ең соңында аламыз: $x_1=104/5$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=28/5$.



Сурет 2.13 - Шешімдер көпбұрышы

2.4 Сызықты программалау есебін симплекс әдісімен шешу

Жоғарыда талқыланған материалдар негізінде мынадай қорытынды жасауға болады. Шешімдер жүйесінде сызықты функция өзінің ең кіші (ең үлкен) мәнін қабылдайтын бұрыштық нүкте кездеседі. Шешімдер жүйесінің әрбір бұрыштық нүктесіне бір тірек жоспары сәйкес келеді. Әрбір тірек жоспары осы жүйеде A_1, A_2, \dots, A_n , n векторлардан тұратын, m сызықты тәуелсіз векторлар жүйесімен анықталады. Тиімді жоспарды табу үшін тек қана тірек жоспарларды зерттеу қажет. Берілген есепте кездесетін тірек жоспарлары санының жоғарғы шегі C_n^m ауыстырулар санымен анықталады. m және n -нің үлкен мәндерінде барлық тірек жоспарларды қарап шығып, тиімді жоспарды табу өте қиын. Сондықтан бір тірек жоспарынан екіншісіне кезекпен өтетін сұлбаның қажеттігі туындайды. Мұндай сұлба, есептің белгілі тірек жоспарынан бастап, шекті қадамдарда оның тірек жоспарын алуға мүмкіндік беретін *симплекс әдіс* болып табылады. Әрбір қадам (немесе итерация) сызықты функцияның ең кіші мәніне сәйкес келетін, функцияның осыдан алдыңғы жоспардағы мәнінен кіші жаңа жоспарды құрудан тұрады. Үдеріс тиімді жоспарды алғанша жалғасады. Егер есептің жоспары болмаса немесе оның сызықты функциясы шешімдер көпбұрышында шектелмеген болса, онда оны симплекс әдіс шешу барысында анықтауға мүмкіндік береді.

2.4.1 Тірек жоспарларды құру

Айталық, сызықты программалау есебі қойылған болсын. $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ функциясының

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

шектеулерде ең кіші мәнін табу қажет, мұндағы $b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$.

Алғашында, есептің шектеулер жүйесі m бірлік векторлардан тұрады деп болжаймыз. Сонымен бірге, жалпылауға шектеулер қоймастан, бірлік векторлар ретінде бастапқы m векторды аламыз.

Онда сызықты функцияның

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \tag{2.4.1}$$

шектеулерде

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.4.3)$$

ең кіші мәнін табу қажет.

Жүйені (2.4.2) векторлық қалыпта жазамыз:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \dots + x_nA_n = A_0 \quad (2.4.4)$$

мұндағы,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторлар A_1, A_2, \dots, A_m – m -өлшемді кеңістіктің сызықты тәуелсіз бірлік векторлары. Олар осы кеңістікте базис құрады. Сондықтан (2.4.4) жіктеуде базистік белгісіздер ретінде x_1, x_2, \dots, x_m аламыз, ал x_{m+1}, \dots, x_n еркін белгісіздерді нөлге теңеп, және $b_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m)$, A_1, A_2, \dots, A_m бірлік векторлар екендігін ескере отырып, бастапқы жоспарды аламыз:

$$X_0 = (x_1 = b_1; \quad x_2 = b_2; \quad \dots; \quad x_m = b_m; \quad x_{m+1} = 0; \dots, \quad x_n = 0) \quad (2.4.5)$$

(2.4.5) жоспарға

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m = A_0 \quad (2.4.6)$$

жіктеу сәйкес келеді, мұндағы A_1, A_2, \dots, A_m сызықты тәуелсіз, сондықтан бастапқы жоспар тірек болып саналады.

Бастапқы (2.4.5) тірек жоспардан екінші тірек жоспарды қалай құруды қарастырамыз. A_1, A_2, \dots, A_m векторлар m -өлшемді кеңістікте базис құрайды. Сондықтан (2.4.4) қатынаста берілген n вектордың әрқайсысын базистік векторлар бойынша тек қана жалғыз жолмен жіктеуге болады:

$$A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Айталық, базиске жатпайтын қандайда бір вектор үшін, мысалы, A_{m+1} вектор үшін

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + \dots + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1} \quad (2.4.7)$$

жіктеудегі $x_{i,m+1}$ коэффициенттердің еш болмағанда біреуі оң болады деп болжайық. Қандайда бір $\theta > 0$ шамасын беру арқылы (әзірше белгісіз), (2.4.7) теңдіктің екі жағын да оған көбейтеміз және нәтижені (2.4.6) теңдіктен әр бір мүшесі бойынша аламыз:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1}) A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1}) A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m,m+1}) A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \quad (2.4.8)$$

Сонымен, егер барлық компоненттері теріс болмаса, онда

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1}; x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots, x_m - \theta x_{m,m+1}; \theta; 0, \dots; 0)$$

векторы жоспар болады. Дегенмен, $\theta > 0$, сондықтан оң емес $x_{i,m+1}$ енетін X_1 векторының барлық компоненттері теріс емес. Сондықтан тек қана оң таңбалы $x_{i,m+1}$ енетін компоненттерді қарау қажет, яғни барлық $x_{i,m+1} > 0$ үшін

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0 \quad (2.4.9)$$

болатын, сондай $\theta > 0$ анықтау қажет.

(2.4.9) теңсіздіктен $\theta \leq x_i / x_{i,m+1}$ аламыз, сондықтан x_1 векторы

$$0 < \theta \leq \min x_i / x_{i,m+1}, \quad (2.4.10)$$

шартын қанағаттандыратын кез келген θ үшін есептің жоспары, мұндағы $x_{i,m+1} > 0$ үшін минимум i бойынша алынады.

Тірек жоспар $m+1$ оң таңбалы компоненттерден құралуы мүмкін емес, сондықтан X_1 жоспарында еш болмағанда бір компонентті нөлге теңеу қажет. (2.4.10) өрнекке

$$\theta = \theta_0 = \min x_i / x_{i,m+1} \quad (2.4.11)$$

қоямыз, онда X_1 жоспардың минимумға жеткізетін компоненті нөлге айналады. Бұл компонент бірінші орында тұрсын деп алайық, яғни

$$\theta_0 = \min x_i / x_{i,m+1} = \min x_1 / x_{1,m+1}.$$

(2.4.8)-ге θ_0 мәнін қойып,

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1} \right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1} \right) A_2 + \dots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1} \right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0$$

аламыз, бұдан

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \dots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0$$

жіктеуін аламыз. Оған жаңа

$$X_1 = (0; x'_2; x'_3; \dots; x'_m; x'_{m+1}; 0; \dots; 0)$$

тірек жоспар сәйкес келеді, мұндағы $x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}$ ($i=2, \dots, m$), $x'_{m+1} = \theta_0$.

Базистен бір векторды алып тастап, оның орнына баскасын θ_0 арқылы қосу, Жордан – Гаусс әдісі көмегінде бір базистен екіншісіне өтуге сәйкес келеді. Сондықтан $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}$ векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз және жаңа базис болып саналады. Келесі тірек жоспарды анықтау үшін $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}$ базисіне кірмейтін кез келген вектор қажет. Осы векторды базистің векторлары бойынша жіктеп, осы базистен векторлардың біреуін шығаратын сондай $\theta_0 > 0$ анықтаймыз.

Сонымен, жаңа тірек жоспарларды алу үдерісі, базиске кіретін басқа бір векторды таңдау және базистен шығарылатын векторды анықтаудан тұрады. Базиске кіретін векторды анықтау үшін қолданылатын шарт, симплекс әдістің негізгі элементтерінің бірі болып табылады.

Байқамыз, егер A_{m+1} векторы базиске кіретін және оны (2.4.7)-ге жіктеуде барлық $x_{i,m+1} \leq 0$ болса, онда (2.4.8) жіктеуден векторлардың біреуін шығаратын, сондай $\theta > 0$ таңдау мүмкін емес екендігі анық. Ондай жағдайда, X_1 жоспары $m+1$ оң таңбалы компоненттерден тұрады, ал $A_1, A_2, \dots, A_m,$

A_{m+1} векторлар жүйесі сызықты тәуелді және сызықты функция минималды мәнін қабылдай алмайтын, шешімдер көпбұрышының бұрыштық емес, ішкі нүктесін анықтайды. Бұл сызықты функцияға сәйкес келетін гипержазықтықтың, оны N векторына қарама-қарсы бағытта қанша алыс жылжытсақта, шешімдер көпбұрышына тірек бола алмайтынын көрсетеді, яғни сызықты функция шешімдер көпбұрышында шектелмеген.

Сонымен, егер сызықты программалау есебінің шектеулер жүйесі теріс емес еркін мүшелерінде бірлік базис құраса, онда бастапқы тірек жоспарды, сонымен бірге векторлардың базис векторлары бойынша жіктелу коэффициенттерін қосымша есептеулерсіз алуға болады.

2.4.2 Тиімді жоспарды іздеу. Тиімділік шарттары

Айталық, (2.4.1) - (2.4.3) сызықты программалау есебі жоспарларға ие және оның әрбір тірек жоспары нұқсанды емес деп алайық. Мұндай жағдайда, (2.4.5) тірек жоспары үшін

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = A_0 \quad (2.4.12)$$

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_m C_m = Z(X_0) \quad (2.4.13)$$

болады, мұндағы барлық $x_i > 0$, ал $Z(X_0)$ - осы жоспарға сәйкес келетін сызықты функцияның мәні.

Кез келген A_i вектордың осы A_1, A_2, \dots, A_m базистегі жіктелуі жалғыз:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \dots + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4.14)$$

сондықтан A_i векторының осы базистегі жіктелуіне

$$x_{1j} C_1 + x_{2j} C_2 + \dots + x_{mj} C_m = Z_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4.15)$$

және сызықты функцияның жалғыз мәні сәйкес келеді, мұндағы Z_j - сызықты функцияның мәні, егер оған белгісіздердің орнына сәйкес j -нші вектордың базис векторлары бойынша жіктелу коэффициенттері қойылса.

Енді, C_j арқылы A_j векторына сәйкес келетін сызықты функцияның коэффициентін белгілейміз. Онда келесі теорема орынды.

Теорема 1. Егер қандайда бір A_j векторы үшін $Z_j - C_j > 0$ шарты орындалса, онда X_0 жоспары тиімді болмайды және $Z(X) < Z(X_0)$ теңсіздігі орындалатын X жоспар құру мүмкін.

Салдар. Егер қандайда бір X_0 жоспары үшін барлық A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) векторларының жіктелуі осы базисте

$$Z_j - C_j \leq 0 \quad (2.4.16)$$

шартын қанағаттандырса, онда X_0 жоспары тиімді болады.

(2.4.16) теңсіздік сызықты функцияның минималды мәнін табуға арналған есеп жоспарының тиімділік шарты болып саналады, ал $Z_j - C_j \leq 0$ мәні жоспардың бағасы деп аталады.

Сонымен, сызықты функцияның минималды мәнін табуға арналған есеп жоспары тиімді болуы үшін, оның бағасы теріс таңбалы болуы қажетті және жеткілікті.

Сызықты функцияның максималды мәнін табуға арналған сызықты программалау есебі үшін (2.4.1) – (2.4.3) келесі теорема орынды.

Теорема 2. Егер қандайда бір A_j векторы үшін $Z_j - C_j < 0$ шарты орындалса, онда X_0 жоспары тиімді болмайды және $Z(X) > Z(X_0)$ шарты орындалатын сондай X жоспарын құру мүмкін.

Салдар. Егер қандайда бір X_0 жоспар үшін осы базисте барлық A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) векторлардың жіктелуі

$$Z_j - C_j \geq 0 \quad (2.4.17)$$

шартын қанағаттандырса, онда X_0 жоспары тиімді болады.

(2.4.17) теңсіздігі – сызықты функцияның максималды мәнін табуға арналған есеп жоспарының тиімділік шарты.

Сонымен, сызықты функцияның максималды мәнін табуға арналған есеп жоспарының тиімді болуы үшін, оның бағалары теріс емес болуы қажетті және жеткілікті.

2.4.3 Симплекс әдісінің алгоритмі

Сызықты программалау есебі берілген болсын. $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ сызықты формуласының келесі шектеулерде минимумын табайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Шектеулер жүйесін (2.4.18) жинақы формада, яғни $x_1 \bar{A}_1 + x_2 \bar{A}_2 + \dots + x_n \bar{A}_n = \bar{A}_0$ түрінде ұсынуға болады, мұндағы \bar{A}_j - j -нші вектор-баған, оның координаталары ретінде x_j белгісіздегі коэффициенттер алынады; \bar{A}_0 - шектеулер жүйесінің еркін мүшелерінің вектор-бағаны.

Бірінші итерация

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	C_1	C_2	\dots	C_m	C_{m+1}	\dots	C_k	\dots	C_n
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\dots	\bar{A}_m	\bar{A}_{m+1}	\dots	\bar{A}_k	\dots	\bar{A}_n
1	\bar{A}_1	c_1	X_1	1	0	\dots	0	$x_{1,m+1}$	\dots	x_{1k}	\dots	x_{1n}
2	\bar{A}_2	c_2	X_2	0	1	\dots	0	$x_{2,m+1}$	\dots	x_{2k}	\dots	x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
l	\bar{A}_l	c_l	X_l	0	0	\dots	0	$x_{l,m+1}$	\dots	x_{lk}	\dots	x_{ln}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
m	\bar{A}_m	c_m	X_m	0	0	\dots	1	$x_{m,m+1}$	\dots	x_{mk}	\dots	x_{mn}
$m+1$	$Z_j - c_j$	$Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$		$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	\dots	$Z_m - c_m$	$Z_{m+1} - c_{m+1}$	\dots	$Z_k - c_k$	\dots	$Z_n - c_n$

Есеп шешімінің өте жиі кездесетін кейбір қасиеттерін анықтайық. Сызықты программалау есебінің шешімі (жоспары) деп, есептің шектеулер жүйесі мен $x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n$ шартын қанағаттандыратын $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторын атаймыз. Сызықты қалып минимумға (немесе максимумға) жететін есептің жоспары тиімді болып табылады.

Қарастырылып жатқан есептің жоспары және m реттік бірлік матрица құрылатын m векторы бар деп болжаймыз. Бірлік $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$ векторлар жүйесінің базисінде есептің бастапқы жоспары $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ жоспар түрінде болады. Егер \bar{X} жоспар үшін барлық $x_i > 0 (i=1,2,\dots,m)$ болса, мұндай жоспар нұсқансыз болады; ал егер бір немесе бірнеше коэффициенттер $x_i = 0$ болса, жоспардың нұсқаны бар болады.

Есепті шешуді, алдын ала $b_i = x_i, a_{ij} = x_{ij}$ деп белгілеп алып, симплекс үдерісінің бірінші итерациясын құрудан бастаймыз. Онда $(m+1)$ -нші қатардағы Z_0 және Z_j мәндерін

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad Z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

формулалары бойынша анықтауға болады.

Есеп жоспарының тиімділік шарты ретінде $(Z_j - c_j) \leq 0$ шартының орындалуы алынады. Егерде шарт орындалмаса, яғни қандайда бір j нөмірі үшін $Z_j - c_j > 0$ болса, онда алдыңғысынан жақсырақ (еш болмағанда нашар емес) жаңа жоспарды іздеу қажет.

Жаңа жоспардың базисі бастапқы базистің $(m-1)$ векторынан және базиске енгізілетін жаңа вектордан тұрады. Базиске қайсы векторды енгізуді анықтау үшін $(m+1)$ -нші қатарға қараймыз. Базиске $\max_j (Z_j - c_j)$ айырмасы

максималды мәнге сәйкес келетін векторды енгіземіз, сонымен бірге, айырманың максималды мәнін барлық j ($j=1,2,\dots,n$) индекстері бойынша аламыз. $\max_j (Z_j - c_j) = Z_k - c_k > 0$ деп болжаймыз. Жаңа базиске \bar{A}_k

векторын енгізу қажет болады. \bar{A}_k векторға сәйкес келетін баған шешуші болып табылады.

Есептің нұсқансыз жоспары тура m оң таңбалы компоненттен тұруы қажет, сондықтан базистен қандай векторды шығаруды анықтау керек. Ол үшін бастапқы жоспардан x_{ik} шешуші бағанның тиісінше оң таңбалы элементтеріне x_i координатасының минималды қатысын есептейді, яғни

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}}, \quad x_{ik} > 0.$$

Осындай оң таңбалы сан

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}$$

болсын. Демек, \bar{A}_l векторын базистен шығару керек. \bar{A}_l векторына сәйкес келетін қатар шешуші болып табылады. Шешуші қатар мен шешуші баған қиылысында орналасқан x_{lk} элемент негізгі немесе шешуші деп аталады. (Бірінші итерацияда шешуші баған мен қатар жақтауға алынған).

Сонымен, жаңа базис ескі базистің $(m-1)$ векторларынан және \bar{A}_k векторынан тұрады. Бұл базисте жаңа $\bar{X}_2 = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ жоспар есептеледі және базиске кірмейтін векторларға, тек қана жалғыз жолмен, базис векторлары бойынша жіктеледі.

Екінші итерация

i	Базис	c_i	\bar{X}_2	C_1	C_2	\dots	C_m	C_{m+1}	\dots	c_k	\dots	c_n
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\dots	\bar{A}_m	\bar{A}_{m+1}	\dots	\bar{A}_k	\dots	\bar{A}_n
1	\bar{A}_1	c_1	X_1'	1	0	\dots	0	$x'_{1,m+1}$	\dots	0	\dots	x'_{1n}
2	\bar{A}_2	c_2	X_2'	0	1	\dots	0	$x'_{2,m+1}$	\dots	0	\dots	x'_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
l	\bar{A}_l	C_l	X_l'	0	0	\dots	0	$x'_{l,m+1}$	\dots	1	\dots	x'_{ln}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
m	\bar{A}_m	c_m	X_m'	0	0	\dots	1	$x'_{m,m+1}$	\dots	0	\dots	x'_{mn}
$m+1$	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = \sum_{i=1}^n c_i x'_i$		$Z'_1 - c_1$	$Z'_2 - c_2$	\dots	$Z'_m - c_m$	$Z'_{m+1} - c_{m+1}$	\dots	$Z'_k - c_k$	\dots	$Z'_n - c_n$

Жаңа x'_i жоспарды құраушылар

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, & (i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m), \\ x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}; \end{cases} \quad (2.4.19)$$

қатынастан, x'_{ij} элементтері келесі қатынастан анықталады:

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, & (i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m), \\ x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Бұл жердегі (2.4.19) және (2.4.20) формулаларын төртбұрыштың сұлбасымен бейнелеп көрсетуге болады (2.14-сурет).

Егер x_{ij} бастапқы мәнінен, x_{ij} элементтің қарама қарсы диагоналында тұрған x_{lj} элементтер, сол x_{ij} элемент тұрған диагоналдағы x_{lk} элементке бөлінсе, онда олардың көбейтінділерін айыру арқылы x'_{ij} жаңа мәнін алуға

болады. Жаңа $X'_2 = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ жоспар және жаңа базис бойынша векторлардың жіктелуі алынады (екінші итерацияға қараңыз).

x_{ij}			x_{ik}
x_{ij}			x_{ik}

Сурет 2.14 – төртбұрыш сұлбасы

Егер екінші итерацияның $(m+1)$ -нші қатарында барлық айырмалар $(Z'_j - c_j) \leq 0$ болса, онда тиімді жоспар алынған; егер еш болмағанда айырмалардың біреуі $(Z'_j - c_j) > 0$ болса, онда бірінші итерация сияқты екінші итерацияны орындау қажет. Бұл үдеріс тиімді жоспар алынғанша, яғни барлық айырмалар $(Z_j - c_j) \leq 0$ болғанша жалғасады.

Мынадай жағдай болуы мүмкін, яғни бір немесе бірнеше айырмалар $(Z_j - c_j) > 0$, ал осы айырмаға сәйкес келетін бағандардың оң таңбалы элементері жоқ (қандайда бір k және барлық i үшін $x_{ik} \leq 0$). Онда сызықты қалып шектелмеген.

Егер бастапқы есеп максимумды табумен байланысты болса, онда тиімді жоспардың келесі шартын қолдануға болады: $(Z_j - c_j)$ айырма есептеледі және $\min(Z_j - c_j)$ -ға сәйкес жаңа вектор таңдалады; бұл жағдайда тиімді жоспар барлық айырмалар $(Z_j - c_j) \geq 0$ болғанда табылады.

Мысал 1. $Z = 4x_1 + 2x_2$ сызықты қалыптың максимумын келесі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Шешуі. Есепті каноникалық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10, \\ x_2 + x_6 = 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6), \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

Шектеулер жүйесін векторлық қалыпта былай жазуға болады:

$$\bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \bar{A}_3 x_3 + \bar{A}_4 x_4 + \bar{A}_5 x_5 + \bar{A}_6 x_6 = \bar{A}_0 \text{ немесе } \bar{A}\bar{X} = \bar{A}_0, \text{ мұндағы}$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, & \bar{A}_0 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, & \bar{A}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \bar{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{A}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{A}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{A}_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Есепте максимум ізделіп жатқандықтан, барлық айырмалар $Z_j - c_j \geq 0$ болғанда, тиімді жоспар алынады. Есептің бастапқы жоспарын құрамыз.

Бастапқы базис $\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5, \bar{A}_6$ векторларынан тұрады; оған $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 5, 14, 10, 8)$ жоспары сәйкес келеді. c_3, c_4, c_5, c_6 нөлге тең болғандықтан, сызықты қалыптың мәні $Z_0 = 0$. Базиске $\min_j (Z_j - c_j)$ сәйкес келетін вектор енгізіледі. Мұндай айырма болып $Z_1 - c_1 = -4$ саналады; оған \bar{A}_1 сәйкес келді, сондықтан \bar{A}_1 векторды базиске енгізу қажет. Базистен қандай векторды шығару қажеттігін анықтау үшін, есептейміз:

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{5}{1}, \frac{14}{2}, \frac{10}{1}\right) = 5.$$

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	4	2	0	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_3	0	5	1	0	1	0	0	0
2	\bar{A}_4	0	14	2	1	0	1	0	0
3	\bar{A}_5	0	10	1	1	0	0	1	0
4	\bar{A}_6	0	8	0	1	0	0	0	1
5	$Z_j - c_j$	$Z_0 = 0$		-4	-2	0	0	0	0

Базистен \bar{A}_3 векторын шығару қажет. Шешуші қатар мен шешуші бағанды аламыз (кестеде жақтаумен бөлектенген). \bar{X}_1 жоспарын (2.4.19) формула арқылы түрлендіріп, жаңа жоспарды аламыз: $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 0, 0, 4, 5, 8)$.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	c_i	\bar{X}_2	4	2	0	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_1	4	5	1	0	1	0	0	0
2	\bar{A}_4	0	4	0	1	-2	1	0	0
3	\bar{A}_5	0	5	0	1	-1	0	1	0
4	\bar{A}_6	0	8	0	1	0	0	0	1
5	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = 20$		0	-2	4	0	0	0

Бұл жағдайда сызықты қалыптың мәні $Z'_0(\bar{X}_2) = 20$. \bar{X}_2 жоспар үшін тиімділік шарты орындалмайды. $Z'_j - c_j$ айырмалар ішінде нөлден кіші айырмалар бар. Мұндай айырмаға $Z'_2 - c_2 = -2 < 0$ жатады, сондықтан \bar{A}_2 векторды базиске енгізу қажет. Қайсы векторды базистен шығару керектігін анықтаймыз.

$$\theta_0 = \min_i \left(\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{8}{1} \right) = 4,$$

демек, \bar{A}_4 векторы базистен шығарылады. Екінші шешуші қатар мен жаңа шешуші бағанды аламыз. \bar{X}_2 жоспарын түрлендіріп, жаңа жоспарды аламыз: $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 4, 0, 0, 1, 4)$.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	c_i	\bar{X}_3	4	2	0	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_1	4	5	1	0	1	0	0	0
2	\bar{A}_2	2	4	0	1	-2	1	0	0
3	\bar{A}_5	0	1	0	0	1	-1	1	0
4	\bar{A}_6	0	4	0	0	2	-1	0	1
5	$Z_j'' - c_j$	$Z_0'' = 28$		0	0	0	2	0	0

Байқаймыз, \bar{X}_3 жоспар үшін тиімділік шарты орындалады, барлық $Z_j'' - c_j \geq 0$.

Бұдан, сызықты қалып $Z_0''(\bar{X}_3) = 28$ де үлкен мән қабылдай алатын сызықты теңдеулер жүйесінің жаңа қолжетімді шешімі жоқ екендігі, яғни $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 4, 0, 0, 1, 4)$ жоспарда сызықты қалып максимумға $Z_{\max} = 28$ жететіні келіп шығады.

Мысал 2. $Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ сызықты қалыптың минимумын

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{cases}$$

шарттада табыңыз.

Шешуі. $\bar{A}_1, \bar{A}_4, \bar{A}_6$ бірлік векторларының бірлік матрицаны құратыны белгілі. Есеп каноникалық түрде қойылған. Векторлық қалыпта шектеулер жүйесін келесі түрде жазамыз: $\bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \bar{A}_3x_3 + \bar{A}_4x_4 + \bar{A}_5x_5 + \bar{A}_6x_6 = \bar{A}_0$, мұндағы

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Есептің минимумы ізделіп жатқандықтан, тиімді жоспарды $Z_j - c_j \leq 0$ болғанда аламыз.

Бастапқы $\bar{A}_1, \bar{A}_4, \bar{A}_6$ базиске $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (7, 0, 0, 2, 0, 10)$ жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	0	1	-3	0	2	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
2	\bar{A}_4	0	2	0	-2	4	1	0	0
3	\bar{A}_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
4	$Z_j - c_j$	$Z_0 = 0$		0	-1	3	0	-2	0

$c_1 = c_4 = c_6 = 0$ болғандықтан, сызықты қалыптың мәні нөлге тең. $\max_j (Z_j - c_j) = Z_3 - c_3 = 3 > 0$, сондықтан базиске \bar{A}_3 векторын енгіземіз.

Базистен шығарылатын векторды анықтау қажет. $x_{i3} > 0$ үшін θ_0 минималды $\frac{x_i}{x_{i3}}$ тең, яғни $\theta_0 = \min_i \left(\frac{2}{4}, \frac{10}{3} \right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Бұдан \bar{A}_4 векторының шығарылатыны

келіп шығады. \bar{X}_1 жоспарын түрлендіріп, сызықты қалыптың мәні $-\frac{3}{2}$ тең

болатын, жаңа $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{15}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{17}{2} \right)$ жоспарын аламыз.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	c_i	\bar{X}_2	0	1	-3	0	2	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_1	0	$\frac{15}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
2	\bar{A}_3	-3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
3	\bar{A}_6	0	$\frac{17}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
4	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = -\frac{3}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	-2	0

$$\max_j (Z'_j - c_j) = Z'_2 - c_2 = \frac{1}{2} > 0, \quad \theta_0 = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = 3 \quad \text{болғандықтан, базиске } \bar{A}_2$$

векторы енгізіледі. Бұдан \bar{A}_1 векторының базистен шығарылатыны келіп шығады. \bar{X}_2 жоспарды түрлендіріп, сәйкес сызықты қалыптың мәні -3-ке тең болатын, жаңа $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 2, 0, 0, 16)$ жоспарын аламыз.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	c_i	\bar{X}_3	0	1	-3	0	2	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6
1	\bar{A}_2	1	3	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
2	\bar{A}_3	-3	2	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
3	\bar{A}_6	0	16	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
4	$Z'_j - c_j$	$Z''_0 = -3$		$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{13}{5}$	0

\bar{X}_3 жоспары үшін тиімділік шарты орындалатыны көрініп тұр, барлық $Z'_j - c_j \leq 0$. Бұдан, $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 2, 0, 0, 16)$ жоспарда сызықты қалыптың мәні $Z_{\min} = -3$ болатыны, яғни есептің сызықты қалыбы $Z(\bar{X}_3) = -3$ де кіші мән қабылдай алатын, сызықты теңдеулер жүйесінің жаңа қолжетімді шешімі жоқ екендігі келіп шығады.

Мысал 3. $Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4$ сызықты қалыбының максимумын келесі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \leq 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{cases}$$

Шешуі. Есепті каноникалық түрге келтіреміз. Ол үшін қосымша x_5, x_6, x_7 айнымалыларды енгіземіз. Есептің шектеулері мынадай түрге келеді:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6,7). \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4$ сызықты қалыптың максимумын анықтаймыз. Бастапқы базис $\bar{A}_5, \bar{A}_6, \bar{A}_7$ болып табылады. Бұл базиске $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 6, 2, 5)$ бастапқы жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	2	1	2	3	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6	\bar{A}_7
1	\bar{A}_5	0	6	3	0	-1	-1	1	0	0
2	\bar{A}_6	0	2	0	1	-1	1	0	1	0
3	\bar{A}_7	0	5	-1	1	1	0	0	0	1
4	$Z_j - c_j$	$Z_0 = 0$		-2	-1	-2	-3	0	0	0

$$\min_j (Z_j - c_j) = Z_4 - c_4 = -3 < 0, \quad \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i4}} = \frac{x_6}{x_{64}} = \frac{2}{1} = 2, \quad \text{сондықтан } \bar{A}_4$$

векторды базиске енгізу, ал \bar{A}_6 векторды базистен шығару қажет. Сонымен, $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 2, 8, 0, 5)$ жаңа жоспарды аламыз.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	c_i	\bar{X}_2	2	1	2	3	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6	\bar{A}_7
1	\bar{A}_5	0	8	3	1	-2	0	1	1	0
2	\bar{A}_4	3	2	0	1	-1	1	0	1	0
3	\bar{A}_7	0	5	-1	1	1	0	0	0	1
4	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = 6$		-2	2	-5	0	0	3	0

$$(Z'_j - c_j) = Z_3 - c_3 = -5 < 0, \quad \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i3}} = \frac{x_7}{x_{73}} = \frac{5}{1} = 5, \quad \text{сондықтан } \bar{A}_3 \text{ векторды}$$

базиске енгізу, ал \bar{A}_7 векторды базистен шығару қажет. $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 5, 7, 18, 0, 0)$ жаңа жоспарды аламыз.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	c_i	\bar{X}_3	2	1	2	3	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6	\bar{A}_7
1	\bar{A}_5	0	18	1	3	0	0	1	1	2
2	\bar{A}_4	3	7	-1	2	0	1	0	1	1
3	\bar{A}_3	2	5	-1	1	1	0	0	0	1
4	$Z_j'' - c_j$	$Z''_0 = 31$	-7	7	0	0	0	0	3	5

$\min_i (Z_j'' - c_j) = Z''_1 - c_1 = -7 < 0$, $\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{i1}} = \frac{18}{1} = 18$, сондықтан \bar{A}_1 векторды базиске енгізу, ал \bar{A}_5 векторды базистен шығару қажет. $\bar{X}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (18, 0, 23, 25, 0, 0, 0)$ жаңа жоспарды аламыз.

Жоспар \bar{X}_4

i	Базис	c_i	\bar{X}_4	2	1	2	3	0	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6	\bar{A}_7
1	\bar{A}_1	2	18	1	3	0	0	1	1	2
2	\bar{A}_4	3	25	0	5	0	1	1	2	3
3	\bar{A}_3	2	23	0	4	1	0	1	1	3
4	$Z_j''' - c_j$	$Z'''_0 = 157$	0	28	0	0	0	7	10	19

\bar{X}_4 жоспары үшін тиімділік шарты орындалатыны көрініп тұр. Барлық айырмалар $Z_j''' - c_j \geq 0$, $Z_{\max} = 157$.

Мысал 4. $Z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$ сызықты қалыбының минимумын келесі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). \end{cases}$$

Шешуі. Шектеулер жүйесін векторлық қалыпта ұсынамыз:

$$\bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \bar{A}_3 x_3 + \bar{A}_4 x_4 + \bar{A}_5 x_5 + \bar{A}_6 x_6 + \bar{A}_7 x_7 = \bar{A}_0,$$

мұндағы

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{A}_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_5, \bar{A}_7$ бірлік векторлары базистік векторлар болып табылатыны айқын. $\bar{A}_5, \bar{A}_2, \bar{A}_1, \bar{A}_7$ бастапқы базиске $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 10, 0, 0, 6, 0, 6)$ жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	1	-1	1	-3	1	-1	-3
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5	\bar{A}_6	\bar{A}_7
1	\bar{A}_5	1	6	0	0	3	0	1	1	0
2	\bar{A}_2	-1	10	0	1	2	-1	0	0	0
3	\bar{A}_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
4	\bar{A}_7	-3	6	0	0	1	0	0	1	1
5	$Z_j - c_j$	$Z_0 = -22$		0	0	-3	4	0	0	0

$(Z_j - c_j) = Z_4 - c_4 = 4 > 0$ болғандықтан, \bar{A}_4 векторды базиске енгізу қажет. Бірақта оның барлық координаталары $x_{i4} \leq 0$, демек, есептің сызықты қалыбы шексіз.

Мысал 5. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5$ сызықты қалыбының минимумын келесі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2, \\ 2x_1 - x_2 & + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 & + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0 & (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Шешуі. $\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ бірлік векторлар жүйесі бастапқы базис болып табылады. Бұл базиске $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 0, 6)$ бастапқы жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	c_i	\bar{X}_1	1	-2	1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_3	1	2	1	2	1	0	0
2	\bar{A}_4	2	0	2	-1	0	1	0
3	\bar{A}_5	-1	6	1	3	0	0	1
4	$Z_j - c_j$	$Z_0 = -4$		3	-1	0	0	0

$\max_j (Z_j - c_j) = Z_1 - c_1 = 3 > 0$ болғандықтан, базиске \bar{A}_1 векторы енгіземіз.

$\theta_0 = \frac{0}{2} = 0$, бұдан \bar{A}_4 векторды базистен шығару қажет. \bar{X}_1 жоспарды түрлендіріп, жаңа \bar{X}_2 жоспарды аламыз.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	c_i	\bar{X}_2	1	-2	1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_3	1	2	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
2	\bar{A}_1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	\bar{A}_5	-1	6	0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
4	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = -4$		0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0

Сызықты қалыптың мәні өзгерген жоқ, базис пен сәйкес жоспар өзгерді. Жаңа $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 0, 6)$ жоспар аламыз. Төртінші индекстік қатарда $\max_j (Z'_j - c_j = Z'_2 - c_2) = \frac{1}{2} > 0$, бұл \bar{A}_2 векторына сәйкес келеді.

Демек, \bar{A}_2 векторын базиске енгізу қажет. $\theta_0 = \min\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{7}\right) = \frac{4}{5}$,

болғандықтан, \bar{A}_3 векторын базистен шығару қажет.

\bar{X}_2 жоспарын түрлендіріп, сызықты қалыптың мәні $Z''_0 = -4\frac{2}{5}$ тең

$\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, \frac{16}{5}\right)$ жаңа жоспар аламыз.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	c_i	\bar{X}_3	1	-2	1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_2	-2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
2	\bar{A}_1	1	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
3	\bar{A}_5	-1	$\frac{16}{5}$	0	0	$-\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	1
4	$Z_j'' - c_j$	$Z_0'' = -4\frac{2}{5}$		0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{5}$	0

Төртінші индекстік қатарда тиімділік шарты орындалады, барлық айырмалар $Z_j'' - c_j \leq 0$, онда $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, \frac{16}{5}\right)$ жоспар сызықты қалыптың $Z_0 = -4\frac{2}{5}$ мәнімен тиімді болады.

2.5. Есепті жасанды базисті симплекс әдіспен шешу

Көптеген сызықты программалаудың қолданбалы есептерінде, шектеулер жүйесінің координаталары арқылы бірлік матрицасын құру мүмкін болатын бірлік векторлары болмайды. Сондай-ақ, есептің шектеулер жүйесі \geq түріндегі теңсіздіктермен берілген жағдайлар кездеседі. Мұндай жағдайда, шешімнің бастапқы базисін құру үшін, каноникалық түрге түрлендірілетін жасанды базистік айнымалыларды енгізуге тура келеді. Келесі есеп берілген болсын.

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ сызықты формасының минимумын келесі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \ (j = 1, 2, n, n+1, n+2, \dots, n+m). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Егер (2.5.1) шектеулер жүйесінде бірлік векторлар кездессе, онда оларды жасанды базиске енгізу қажет. Бұл енгізілетін жасанды айнымалылардың санын азайтады және шешу үшін қажетті итерациялардың санын қысқартады. Мұндай жағдайда толық емес жасанды базисті есеп шешіледі. Егер (2.5.1) шектеулер жүйесінде бірлік векторлар кездеспесе, онда толық

жасанды базисті есепті аламыз. Бастапқы есепке қатысты кеңейтірілген есепті құрамыз.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m} \quad (2.5.2)$$

сызықты формасының минимумын келесі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, n, n+1, n+2, \dots, n+m). \end{cases} \quad (2.5.3)$$

(2.5.3) теңдеулер жүйесі (2.5.1) жүйесінен теріс емес жасанды айнымалыларды енгізу арқылы алынған. (2.5.2) қатынасында жасанды айнымалылардағы M коэффициенті – еркін үлкен сан. (2.5.2) және (2.5.3) қатынастары арқылы, симплекс әдісімен шешілетін, M -есеп деп аталатын, жаңа есепті анықтаймыз. Шекті санды итерациялар арқылы, оның тиімді шешімі табылады немесе есептің шешімі жоқ екендігі анықталады. M -есеп пен бастапқы есеп арасында белгілі бір тәуелділік бар. M -есеп шешілмейтін жағдайда бастапқы есеп, немесе шешілмейді, немесе оның сызықты қалыбы шектелмеген болады.

Егер M -есептің тиімді шешімінде барлық жасанды айнымалылар нөлге тең болса, онда $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторы бастапқы есептің тиімді шешімі болып табылады. Ал егер жасанды айнымалылардың кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда бастапқы есептің шешімі болмайды. Атап өткен жөн, базисте жасанды векторлар кездесетін жағдайда, $Z_j - c_j$ айырмалар M -нің сызықты функциялары болады. Сонымен бірге, $Z_j - c_j$ айырмалардың әрқайсысы, біреуі M -ге тәуелді, екі бір-біріне тәуелсіз бөліктерден тұрады.

Есептеу нәтижелері кестеде келтірілген. Бұл жерде $b_{ij} = x_{n+i}$, $a_{ij} = x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$ белгілеулер енгізілген. Толық $\bar{A}_{n+1}, \bar{A}_{n+2}, \dots, \bar{A}_{n+m}$ жасанды базисті есебіне $\bar{X}_1 = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ бастапқы жоспары сәйкес келеді деп болжаймыз. Кестені өңдеу симплекс үдерісінің бірінші итерациясына ұқсас жүргізіледі, айырмашылығы, жоспардың тиімділік шарты $(m+2)$ -нші қатарда тексеріледі. $(m+2)$ -нші қатар қаралады, және базиске енгізілетін вектор, осы қатардың ең үлкен оң таңбалы элементімен анықталады.

Егер барлық жасанды векторлар базистен шығарылған болса, онда әрі қарай әдеттегі симплекс әдісі қолданылады. Сонымен бірге, жасанды векторларды итерцияға енгізбеуге болады.

Бірінші итерация

i	Базис	c_i	\bar{x}_1	C_1	C_2	\dots	C_k	\dots	C_n
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\dots	\bar{A}_k	\dots	\bar{A}_n
1	\bar{A}_{n+1}	M	x_{n+1}	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1k}	\dots	x_{1n}
2	\bar{A}_{n+2}	M	x_{n+2}	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2k}	\dots	x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
l	\bar{A}_{n+l}	M	x_{n+l}	x_{l1}	x_{l2}	\dots	x_{lk}	\dots	x_{ln}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
m	\bar{A}_{n+m}	M	x_{n+m}	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mk}	\dots	x_{mn}
m+1	\bar{C}_j		0	$-C_1$	$-C_2$	\dots	$-C_k$	\dots	$-C_n$
m+2			$\sum x_{n+i}$	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	\dots	$\sum x_{ik}$	\dots	$\sum x_{in}$

Жасанды базистер әдісіне мысалдар келтіреміз.

Мысал 1. $Z = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5$ сызықты қалыбының келесі шектеулерде минимумын табу қажет:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Шешуі. Есептің шартында \bar{A}_1 бірлік векторы бар болғандықтан, екі қосымша \bar{A}_6 және \bar{A}_7 векторларын енгізу қажет. Онда есеп былайша қойылады.

$Z = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + Mx_6 + Mx_7$ сызықты формасының минимумын келесі шектеулерде табу қажет:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6,7). \end{cases}$$

Бастапқы жоспар болып $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (6, 0, 0, 0, 0, 6, 5)$ саналады.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	C_i	\bar{X}_1	-1	2	1	3	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_1	-1	6	1	2	3	2	-1
2	\bar{A}_6	M	6	0	2	4	-4	2
3	\bar{A}_7	M	5	0	1	1	1	1
4	$Z_j - c_j$		-6	0	-4	-4	-5	2
5			11	0	3	5	-3	3

Сызықты қалыптың $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (6, 0, 0, 0, 0, 6, 5)$ жоспарына сәйкес келетін мәні $-6 + 11M$ -ге тең. Бесінші қатарда ең үлкен элемент болып, мәні 5-ке тең (5;3) элемент саналады. Сондықтан базиске \bar{A}_3 векторын енгізу қажет. Анықтаймыз $\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i3}} = \min\left(\frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{5}{1}\right) = \frac{3}{2}$. Бұдан \bar{A}_6 векторды базистен шығару қажет.

$$\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{7}{2}\right) \text{ жоспарын аламыз.}$$

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	C_i	\bar{X}_2	-1	2	1	3	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_1	-1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	5	$-\frac{5}{2}$
2	\bar{A}_3	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$
3	\bar{A}_7	M	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$
4	$Z_j'' - c_j$		0	0	-2	0	-9	4
5			$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$

Бесінші қатарда ең үлкен элемент болып, мәні 2-ге тең (5;4) элемент саналады. Сондықтан базиске \bar{A}_4 векторын енгізу қажет.

$$\theta_0 = \min\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{10} \text{ болғандықтан } \bar{A}_1 \text{ векторды базистен шығару қажет.}$$

$$\text{Сызықты қалыптың мәні } \frac{27}{10} + \frac{29}{10}M \text{ -ге тең } \bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(0, 0, \frac{9}{5}, \frac{3}{10}, 0, 0, \frac{29}{10}\right) \text{ жаңа жоспар аламыз.}$$

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	C_i	\bar{X}_3	-1	2	1	3	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_4	3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
2	\bar{A}_3	1	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0
3	\bar{A}_7	M	$\frac{29}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{3}{2}$
4	$Z_j - c_j$		$\frac{27}{10}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{11}{10}$	0	0	$-\frac{1}{2}$
5			$\frac{29}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{3}{2}$

Бесінші қатарда ең үлкен элементтің мәні $\frac{3}{2}$, \bar{A}_5 векторына сәйкес келеді.

Сондықтан базиске \bar{A}_5 векторын енгізу қажет. $\theta_0 = \frac{29}{10} : \frac{3}{2} = \frac{29}{15}$ болғандықтан

\bar{A}_7 векторын базистен шығару қажет. Келтірілген жоспарды түрлендіріп, $\bar{X}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(0, 0, \frac{9}{5}, \frac{19}{15}, \frac{29}{15}, 0, 0\right)$ жоспарын аламыз. \bar{X}_4

жоспарда сызықты қалыптың мәні $\frac{11}{3}$ -ке тең.

Жоспар \bar{X}_4

i	Базис	C_i	\bar{X}_4	-1	2	1	3	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_4	3	$\frac{19}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0
2	\bar{A}_3	1	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0
3	\bar{A}_5	-1	$\frac{29}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1
4	$Z_j - c_j$	$Z_0 = \frac{11}{3}$		$\frac{5}{3}$	-1	0	0	0

$\max_j (Z_j - c_j) = Z_1 - c_1 = \frac{5}{3}$ болғандықтан, базиске \bar{A}_1 векторын енгізу

қажет. $\theta_0 = \min\left(\frac{19}{15} : \frac{1}{15}, \frac{9}{5} : \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{5} : \frac{1}{5} = 9$, демек, \bar{A}_3 векторы базистен

шығарылады. $\bar{X}_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(9, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{13}{3}, 0, 0\right)$ жаңа жоспар аламыз. Сызықты қалыптың мәні \bar{X}_5 жоспарда $-\frac{34}{3}$ -ке тең.

Жоспар \bar{X}_5

i	Базис	C_i	\bar{X}_5	-1	2	1	3	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_4	3	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0
2	\bar{A}_1	-1	9	1	3	5	0	0
3	\bar{A}_5	-1	$\frac{13}{3}$	0	1	4	0	1
4	$Z_4^V - c_j$	$Z'_0 = -\frac{34}{3}$		0	-6	-9	0	0

Төртінші индекстік қатарда барлық айырмалар $Z_j^V - c_j \leq 0$, яғни тиімділік шарты жоспар үшін орындалады. $\bar{X}_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(9, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{13}{3}, 0, 0\right)$ жоспарда сызықты қалыптың $Z_{\min} = Z'_0 = -\frac{34}{3}$ мәнін алдық.

Мысал 2. $Z = 2x_1 + x_2 - x_3$ функциясының максимумын келесі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Шешуі. Есепті каноникалық түрге келтіреміз. $Z' = -Z = -2x_1 - x_2 + x_3$ функциясын келесі шектеулерде минимумдау қажет:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

Шектеулер жүйесінде екі \bar{A}_3 және \bar{A}_4 бірлік векторлары болғандықтан, базисті құру үшін бір жасанды вектор \bar{A}_6 енгіземіз, онда есеп былай

қойылады: $Z = -2x_1 - x_2 + x_3 + M x_6$ сызықты қалыбын келесі шектеулерде минимумдау қажет:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6). \end{cases}$$

$\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_6$ базисіне сәйкес $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 3, 5, 0, 2)$ бастапқы жоспар болады.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	C_i	\bar{X}_1	-2	-1	1	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_3	1	3	-1	2	1	0	0
2	\bar{A}_4	0	5	1	3	0	1	0
3	\bar{A}_6	M	2	1	1	0	0	-1
4	Z		3	1	3	0	0	0
5			2	1	1	0	0	-1

$\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 3, 5, 0, 2)$ жоспарына сәйкес сызықты қалыптың мәні $3 + 2M$ -ге тең. Бесінші қатарда ең үлкен элементтер болып, мәні 1-ге тең $(5;1)$ және $(5;2)$ саналады. Сондықтан базиске \bar{A}_1 немесе \bar{A}_2 векторын енгізу қажет. Айталық, базиске \bar{A}_1 векторын енгізейік.

$\theta_0 = \min\left(\frac{5}{1}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$ болғандықтан, базистен \bar{A}_6 векторын шығарамыз.

Егер базиске \bar{A}_2 векторын енгізсек, онда екінші итерацияда бастапқы базистен \bar{A}_4 векторы шығарылады.

\bar{X}_1 жоспарын түрлендіріп, \bar{X}_2 жоспарын аламыз.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	C_i	\bar{X}_2	-2	-1	1	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_3	1	5	0	3	1	0	-1
2	\bar{A}_4	0	3	0	2	0	1	1
3	\bar{A}_1	-2	2	1	1	0	0	-1
4	$Z'_j - c_j$	$Z'_0 = 1$		0	2	0	0	1

Алынған $\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_1$ базисіне сызықты қалыптың $Z'_0 = 1$ мәнімен есептің $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 5, 3, 0, 0)$ жоспары сәйкес келеді. Индекстік қатардағы $Z'_j - c_j$ максималды мәнге \bar{A}_2 векторы сәйкес келеді, яғни $(Z'_j - c_j) = (Z'_2 - c_2) = 2 > 0$. Базиске \bar{A}_2 векторын енгізу керек.

$\theta_0 = \min\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$, базистен \bar{A}_4 векторын шығару қажет. Жаңа

$\bar{A}_3, \bar{A}_2, \bar{A}_1$ базиске $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ жоспары сызықты қалыптың $Z''_0 = -2$ мәнімен сәйкес келеді.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	C_i	\bar{X}_3	-2	-1	1	0	0
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3	\bar{A}_4	\bar{A}_5
1	\bar{A}_3	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
2	\bar{A}_2	-1	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	\bar{A}_1	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
4	$Z''_j - c_j$	$Z''_0 = -2$		0	0	0	-1	0

Жоспар үшін $Z''_j - c_j \leq 0$ тиімділік шарты орындалады. Сызықты қалыптың $Z''_{\min} = -2$ мәнімен $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ жоспар алынды. Бастапқы есепте функцияны максималдау талап етілген болатын, сондықтан сызықты қалыптың тиімді мәні $Z_{\max} = 2$.

Мысал 3. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3$ сызықты қалыбының максимумын келесі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3). \end{cases}$$

Шешуі. Шектеулер жүйесінің бірінші теңдеуін 2-ге бөлеміз және x_4, x_5 қосымша айнымалыларын енгіземіз. Сызықты қалыптың максимумын табудың орнына минимумын табамыз. Онда есеп былай қойылады:

$Z = -x_1 + 2x_2 - x_3 + M(x_4 + x_5)$ сызықты қалыбының максимумын келесі шектеулерде табыңыз:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

$\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ бастапқы базис болады. Оған $\bar{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 3, 3)$ жоспары сәйкес келеді.

Бастапқы жоспар \bar{X}_1

i	Базис	C_i	\bar{X}_1	-1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3
1	\bar{A}_3	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
2	\bar{A}_4	M	3	1	2	0
3	\bar{A}_5	M	3	-1	4	0
4	$Z_j - C_j$		-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0
5			6	0	6	0

Бесінші қатарда ең үлкен мән 6, ол (5;2) элементке сәйкес келеді. Сондықтан жаңа базиске \bar{A}_2 векторын енгізу қажет. $\theta_0 = \min\left(\frac{2}{1/2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ болғандықтан \bar{A}_5 векторын базистен шығару қажет.

Сызықты қалыптың $-\frac{1}{8} + \frac{3}{2}M$ мәнімен $\bar{X}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{3}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{2}, 0)$ жоспарын аламыз.

Жоспар \bar{X}_2

i	Базис	C_i	\bar{X}_2	-1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3
1	\bar{A}_3	-1	$\frac{13}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	1
2	\bar{A}_4	M	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
3	\bar{A}_2	2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0
4	$Z_j' - c_j$		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0
5			$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0

Бесінші қатарда ең үлкен мән $\frac{3}{2}$, ол (5;1) элементке сәйкес келеді. Сондықтан жаңа базиске \bar{A}_1 векторын енгізу қажет. $\theta_0 = \min\left(\frac{13}{8} : \frac{5}{8}, \frac{3}{2} : \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 1$, демек, \bar{A}_4 векторын базистен шығару қажет.

Сызықты қалыптың $Z_0 = 0$ мәнімен $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$ жоспарын аламыз.

Жоспар үшін тиімділік шарты орындалады, барлық $Z_j'' - c_j \leq 0$.

Жоспар \bar{X}_3

i	Базис	C_i	\bar{X}_3	-1	2	-1
				\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{A}_3
1	\bar{A}_3	-1	1	0	0	1
2	\bar{A}_1	-1	1	1	0	0
3	\bar{A}_2	2	1	0	1	0
4	$Z_j'' - c_j$	$Z_0 = 0$		0	0	0

Сызықты қалыптың $Z_{\max} = Z_0 = 0$ мәнімен $\bar{X}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$ жоспары алынды.

2.6 Сызықты программалауда қосалқылық

Қосалқылық түсінігі. Әрбір сызықты программалау есебімен, қосалқы деп аталатын екінші сызықты есеп тығыз байланысты. Бірінші есеп бастапқы деп аталады.

Бастапқы және қосалқы есеп арасындағы байланыс, бастапқы есептегі мақсат функциясының C_j коэффициенттері қосалқы есептегі шектеулер жүйесінің еркін мүшелері болып, ал бастапқы есептегі шектеулер жүйесінің b_i еркін мүшелері қосалқы есептегі мақсат функциясының коэффициенттері болып табылады. Сондай-ақ, қосалқы есептегі шектеулер жүйесінің коэффициенттер матрицасы, бастапқы есептегі шектеулер жүйесінің транспонирленген коэффициенттер матрицасы болады. Қосалқы есептің шешімін бастапқы есептің шешімінен алуға болады және керісінше.

Мысал ретінде шикізаттан пайдалану есебін қарастырайық. Кәсіпорында өнімдердің n түрін өндіру үшін, шикізаттың b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) мөлшерде m түрлері бар. Бір бірлік j -нші өнімді өндіру үшін i -нші шикізаттың a_{ij} бірлігі сарыпталады, ал оның құнын C_j бірлік құрайды. Ең үлкен пайда түсетін өнім шығару жоспарын құру қажет.

j -ншы өнім бірлігінің санын x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) арқылы белгілейміз. Онда бастапқы есепті былайша тұжырымдаймыз:

Сызықты $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ функциясына ең үлкен мән беретін,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

шектеулерді қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторын табу қажет.

Өнімді шығаруға қажетті шикізаттарды бағалаймыз. Шығындар бағасының бірлігі ретінде өндірілетін өнім бағасының бірлігін аламыз. i -нші шикізат бірлігінің бағасын y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) арқылы белгілейміз.

Онда j -нші өнім бірлігін дайындауға жұмсалатын барлық шикізаттардың бағасы $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ -ге тең. Жұмсалған шикізаттардың бағасы соңғы өнімнің

бағасынан кіші болуы мүмкін емес, сондықтан $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq C_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

орындалуы қажет.

Барлық қолжетімді шикізаттардың бағасын $\sum_{i=1}^m b_i y_i$ шамасымен өрнектейміз.

Сонымен, қосалқы есепті келесі түрде тұжырымдаймыз:

Сызықты $f = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ функциясына ең кіші мән беретін,

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq C_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq C_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n, \\ y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

шектеулерді қанағаттандыратын $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ векторын табу қажет.

Қарастырылған бастапқы және қосалқы есептерді экономикалық түрде былайша түсіндіреміз.

Бастапқы есеп. Берілген C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) өнім бірлігі бағалары шамасында және b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) шикізаттардың қолжетімді мөлшерінде, өнім шығарудың бағасын максимумдау үшін, қанша және қандай x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) өнім шығару қажет?

Қосалқы есеп. Берілген b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) шикізаттар мөлшерінде және C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) өнім бірлігі бағалары шамасында, жалпы шығындар бағасын минимумдау үшін, әрбір шикізат бірлігінің бағасы қандай болуы қажет?

y_i айнымалыларды баға немесе есепке алу, айқын емес құны деп атайды.

Сызықты программалаудың көптеген есептері алғашында бастапқы немесе қосалқы есеп түрінде қойылады, сондықтан сызықты программалаудың қосалқы есептерінің жұбы туралы сөз жүргізу жөн болады.

2.6.1 Симметриялық емес қосалқы есептер

Қосалқылық теоремасы. Симметриялық емес қосалқы есептерде бастапқы есептің шектеулер жүйесі теңдік түрінде, ал қосалқыда – теңсіздік түрінде беріледі. Сондай-ақ, соңғысында айнымалылар теріс таңбалы болуы да мүмкін. Есептің қойылымын дәлелдеуде қарапайымдылық үшін матрицалық қалыпта жазуға келісеміз.

Бастапқы есеп. $Z = CX$ сызықты функциясының минимумын және

$$AX = A_0, X \geq 0 \quad (2.6.1)$$

шектеулерді қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ матрица-бағанды табу қажет.

Қосалқы есеп. $f = YA_0$ сызықты функциясының максимумын және

$$YA \leq C \quad (2.6.2)$$

шектеулерді қанағаттандыратын $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ матрица-қатарды табу қажет.

Екі есепте де $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - матрица-қатар, $A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ - матрица-баған, $A = (a_{ij})$ - шектеулер жүйесінің коэффициенттері матрицасы.

Қосалқы есептер жұбының тиімді жоспарлары арасындағы байланысты келесі теорема орнатады.

Теорема 2.6.1 (қосалқылық теоремасы). Егер қосалқы есептер жұбының біреуі тиімді жоспарға ие болса, онда екіншісі де шешімге ие, сонымен бірге, сызықты функциялардың төтенше мәндері үшін $\min Z = \max f$ қатынасы орындалады. Егер есептің біреуінің сызықты функциясы шектелмеген болса, онда екіншісінің шешімі болмайды.

Дәлелдеу. Бастапқы есеп симплекс әдісімен алынған тиімді жоспарға ие деп болжаймыз. Жалпы түрде, соңғы базис A_1, A_2, \dots, A_m бірінші m векторларынан тұрады деп есептеуге болады. Онда соңғы симплекс кесте келесі түрде бейнеленеді (2.1-кесте).

Кесте 2.1

i	Базис	C	A_0	C_1	C_2	\dots	C_m	C_{m+1}	\dots	C_n
				A_1	A_2	\dots	A_m	A_{m+1}	\dots	A_n
1	A_1	C_1	x_1^*	1	0	\dots	0	$x_{1,m+1}$	\dots	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2^*	0	1	\dots	0	$x_{2,m+1}$	\dots	x_{2n}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
m	A_m	C_m	x_m^*	0	0	\dots	1	$x_{m,m+1}$	\dots	x_{mn}
$m+1$	$Z_i - C_j$		Z_0	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	\dots	$Z_m - C_m$	$Z_{m+1} - C_{m+1}$	\dots	$Z_n - C_n$

Айталық, D - A_1, A_2, \dots, A_m соңғы базис векторларының компоненттерінен құралған матрица болсын. Онда 2.1-кесте бастапқы жүйенің базис векторлары бойынша A_1, A_2, \dots, A_m векторларының жіктеу коэффициенттерінен тұрады, яғни осы кестедегі әрбір A_j векторға

$$A_j = DX_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6.3)$$

орындалатын X_j векторы сәйкес келеді.

Тиімді жоспар үшін

$$A_0 = DX^* \quad (2.6.4)$$

аламыз, мұндағы $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$.

2.1-кестеге жазылған A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) векторларының жіктеу коэффициенттерінен тұратын матрицаны X арқылы белгілейміз.

Онда, (2.6.3) және (2.6.4) қатынастарды ескере отырып

$$A = D\bar{X}, \quad D^{-1}A = \bar{X} \quad (2.6.5)$$

$$A_0 = DX^*, \quad D^{-1}A_0 = X^* \quad (2.6.6)$$

$$\min Z = C^* X^* \quad (2.6.7)$$

$$\bar{Z} = C^* \bar{X} - C \leq 0 \quad (2.6.8)$$

аламыз, мұндағы $C^* = (C_1^*, C_2^*, \dots, C_m^*)$, $C = (C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_n)$, ал $\bar{Z} = (C^* X_1 - C_1, C^* X_2 - C_2, \dots, C^* X_n - C_n) = (Z_1 - C_1, Z_2 - C_2, \dots, Z_n - C_n)$ - тиімді жоспарға тиісті $Z_j - C_j$ сәйкес келгендіктен, компоненттері оң таңбалы емес вектор.

Бастапқы есептің тиімді жоспарын $X^* = D^{-1}A_0$ түрінде аламыз, сондықтан қосалқы есептің тиімді жоспарын

$$Y^* = C^* D^{-1} \quad (2.6.9)$$

түрінде іздейміз.

Енді, Y^* шын мәнінде қосалқы есептің жоспары екендігін көрсетеміз. Ол үшін (2.6.2) шектеуді $YA - C \leq 0$ теңсіздік түрінде жазамыз. Теңсіздіктің сол жағына Y^* -ны қоямыз. Онда (2.6.9), (2.6.5) және (2.6.8) негізінде $Y^* A - C = C^* D^{-1} A - C = C^* \bar{X} - C \leq 0$ аламыз. Бұдан табамыз, $Y^* A \leq C$.

Y^* (2.6.2) шектеулерді қанағаттандырады, онда ол қосалқы есептің жоспары болып саналады. Бұл жоспарда қосалқы есептің сызықты функциясының мәні $f(Y^*) = Y^* A_0$. (2.6.9), (2.6.6) және (2.6.7) қатынастарды ескере отырып,

$$f(Y^*) = Y^* A_0 = C^* D^{-1} A_0 = C^* X^* = \min Z(X) \quad (2.6.10)$$

аламыз.

Сонымен, қосалқы есептегі сызықты функцияның Y^* мәні бастапқы есептегі сызықты функцияның минималды мәніне сандық түрде тең.

Енді, Y^* тиімді жоспар екендігін дәлелдейміз. (2.6.1) өрнекті қосалқы есептің кез келген Y жоспарына, (2.6.2) өрнекті бастапқы есептің кез келген

X жоспарына көбейтеміз: $YAX = YA_0 = f(Y)$, $YAX \leq CX = Z(X)$, бұдан кез келген X және Y жоспарларына

$$f(Y) \leq Z(X) \quad (2.6.11)$$

теңсіздігі орынды екендігі келіп шығады.

Осы қатынастармен $\max f(Y) \leq \min Z(X)$ экстремалдық мәндері де байланысқан. Соңғы теңсіздіктен, сызықты функция максималды мәніне тек қана $f(Y) = \min Z(X)$ болғанда ғана жетеді деп түйіндейміз. Бірақта $f(Y)$ бұл мәнге Y^* жоспарда жетеді [(2.6.10)-ға қараңыз], сондықтан Y^* жоспар – қосалқы есептің тиімді жоспары.

Дәл осылай, егер қосалқы есеп шешімге ие болса, онда бастапқы есептің де шешімі бар болады және $f(Y) = \min Z(X)$ қатынасы орынды.

Теореманың екінші бөлігін дәлелдеу үшін, бастапқы есептің сызықты функциясы төменнен шектелмеген болсын. Онда (2.6.11)-ден $F(Y) \leq -\infty$ келіп шығады. Бұл өрнектің мағынасы жоқ, сондықтан қосалқы есептің шешімі жоқ.

Дәл осылай, қосалқы есептің сызықты функциясы жоғарыдан шектелмеген деп болжаймыз. Онда (2.6.11)-ден $Z(X) \geq +\infty$ аламыз. Бұл өрнектің де мағынасы жоқ, сондықтан бастапқы есеп шешімге ие болмайды.

Дәлелденген теорема қосалқы есептердің біреуін шешкенде екіншісінің тиімді жоспарын табуға мүмкіндік береді.

Бастапқы есеп. $Z = x_2 - x_4 - 3x_5$ сызықты функциясының минимум мәнін

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

Бұл жерде матрица-қатар $C = (0; 1; 0; -1; -3; 0)$, матрица-баған

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Қосалқы есеп. $f = y_1 + 2y_2 + 5y_3$ сызықты функциясының максимум мәнін

$$\begin{cases} y_1 \leq 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ y_2 \leq 0, \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3, \\ y_3 \leq 0, \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

Бастапқы есептің шешімін симплекс әдісімен табамыз (2.2-кесте).

Кесте 2.2

i	Базис	C	A_0	0	1	0	-1	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	0	1	1	2	0	-1	1	0
2	A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
3	A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	0	-1	0	1	3	0
1	A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
2	A_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
3	A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		-3	-3	-7	0	4	0	0
1	A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
2	A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
3	A_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		-15	-7	1	-4	0	0	0
1	A_5	-3	4	3	0	1	0	1	0
2	A_4	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
3	A_2	1	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
m+1	$Z_j - C_j$		-46/3	-19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

$Z_{\min} = -46/3$ мәнге ие бастапқы есептің тиімді жоспары $X^* = (0; 1/3; 0; 11/3; 4; 0)$ 2.2-кестенің төртінші итерациясында алынды. Осы итерацияны пайдаланып, қосалқы есептің тиімді жоспарын табамыз. Қосалқылық теоремасы бойынша қосалқы есептің тиімді жоспары $Y^* = C^* D^{-1}$ қатынастан табылады, мұндағы D^{-1} матрицасы – бастапқы

есептің тиімді жоспары алынған соңғы базиске енетін векторлардың компоненттерінен құралған кері матрица.

Соңғы базиске A_5, A_4, A_2 векторлар кіреді, демек

$$D = (A_5, A_4, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

D^{-1} кері матрицасы төртінші итерацияның A_1, A_3, A_6 бағандарында тұрған коэффициенттерден құралған:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Осы итерациядан $C^* = (-3; -1; 1)$ келіп шығады. Сонымен,

$$Y^* = C^* D^{-1} = (-3; -1; 1) * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$Y^* = (-19/3; -11/3; -1/3)$$

яғни, $y_j = C^* X_i$, мұндағы X_i - бастапқы бірлік базис векторларының бағандарында тұрған, соңғы итерацияның жіктелу коэффициенттері.

Демек, i -нші қосалқы айнымалыны, бастапқы бірлік базиске енетін, сәйкес векторға қарсы тұрған $(m+1)$ -нші қатар бағасының мәнінен алуға болады, егер оған сызықты функциясы коэффициентінің

$$y_1 = -19/3 + 0 = -19/3; y_2 = -11/3 + 0 = -11/3; y_3 = -1/3 + 0 = -1/3$$

сәйкес мәнін қоссақ. Онда жоспар $\max f = -46/3$ мәнге ие болады.

2.6.2 Симметриялық қосалқы есептер

Сызықты программалаудың қосалқы есептерінің бір түрі болып симметриялық қосалқы есептер саналады. Мұндай есептерде бастапқы, сондай-ақ, қосалқы есептердің шектеулер жүйесі теңсіздіктермен беріледі. Сонымен бірге, қосалқы айнымалыларға теріс еместік шарты жүктеледі.

Бастапқы есеп. $Z = CX$ сызықты функциясының минимумын және

$$AX \geq A_0, X \geq 0 \quad (2.6.12)$$

шектеулерді қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ матрица-бағанды табу қажет.

Қосалқы есеп. $f = YA_0$ сызықты функциясының максимумын және $YA \leq C, Y \geq 0$ шектеулерді қанағаттандыратын $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ матрица-қатарды табу қажет.

Теңсіздіктер жүйесін қосымша айнымалылар енгізу арқылы теңдеулер жүйесіне түрлендіру мүмкін. Сондықтан кез келген симметриялық қосалқы есептер жұбын симметриялық емес жұбына түрлендіруге болады. Оларға қосалқылық теоремасы дәлелденген.

Симметрияны қолдану арқылы, шешуге ыңғайлы есепті таңдауға болады. Компьютер көмегімен шешілетін есептің көлемі енгізілетін қатарлар санымен шектелген. Сондықтан бастапқы қойылымда өте ауқымды есепті қосалқы тұжырымда оңайлатуға болады. Компьютерсіз есептеулерде қосалқылықты пайдалану есептеуді жеңілдетеді.

Бастапқы есеп. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ сызықты функциясының минимум мәнін

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

Қосалқы есепті жазу үшін бастапқы есептің шектеулер жүйесін (2.6.12) түрге келтіру қажет. Ол үшін екінші теңсіздікті -1 -ге көбейтеміз.

Қосалқы есеп. $f = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4$ сызықты функциясының максимум мәнін

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2, \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq 3, \\ y_i \geq 0 \quad (i=1,2,3,4) \end{cases}$$

шектеулерде табу қажет.

Бастапқы есепті шешу үшін төрт қосымша айнымалыларды және жүйені түрлендіргеннен кейін, бір жасанды айнымалыны енгізу қажет.

Сонымен, бастапқы симплекс кесте, элементтері түрлендіруді қажет ететін алты қатар және тоғыз бағаннан тұрады. Қосалқы есепті шешу үшін үш қосымша айнымалыларды енгізу қажет. Шектеулер жүйесі алдын ала түрлендіруді талап етпейді. Оның бірінші симплекс кестесі төрт қатар және сегіз бағаннан тұрады.

Қосалқы есепті симплекс әдісімен шешеміз (2.3-кесте). Қосалқы есептің тиімді жоспары $Y^* = (0; 1/2; 3/2; 0)$, $f_{\max} = 21/2$.

Бастапқы есептің тиімді жоспарын соңғы итерацияның A_1 , A_3 , A_6 бағандарында тұратын $(m+1)$ -нші қатарының бағасын пайдаланып табамыз: $x_1 = 3/2 + 0 = 3/2$, $x_2 = 9/2 + 0 = 9/2$, $x_3 = 0 + 0 = 0$.

Сызықты функция бастапқы есептің $X^* = (3/2; 9/2; 0)$ тиімді жоспарында $Z_{\min} = 21/2$ ең кіші мәніне жетеді.

Кесте 2.3

i	Базис	C	A_0	2	3	6	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
2	A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
3	A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
1	A_3	6	1	2	1	1	2	1	0	0
2	A_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
3	A_7	0	5	3	6	0	2	2	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		6	10	-9	0	9	6	0	0
1	A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
2	A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
3	A_7	0	2	3	0	0	4	5	3	1
m+1	$Z_j - C_j$		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

2.6.3. Қосалқы есептің математикалық моделінің түрлері

Жоғарыда қаралған симметриялық емес және симметриялық қосалқы есептер негізінде қосалқы есептер жұбының математикалық модельдері келесі түрлердің біріне сәйкес келеді деп түйіндеуге болады.

Симметриялық емес есептер

(1) Бастапқы есеп

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= CX; \\ AX &= A_0; \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Қосалқы есеп

$$\begin{aligned} f_{\max} &= YA_0; \\ YA &\leq C. \end{aligned}$$

(2) Бастапқы есеп

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= CX; \\ AX &= A_0; \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Қосалқы есеп

$$\begin{aligned} f_{\min} &= YA_0; \\ YA &\geq C. \end{aligned}$$

Симметриялық есептер

(3) Бастапқы есеп

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= CX; \\ AX &\geq A_0; \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Қосалқы есеп

$$\begin{aligned} f_{\max} &= YA_0; \\ YA &\leq C; \\ Y &\geq 0. \end{aligned}$$

(4) Бастапқы есеп

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= CX; \\ AX &\leq A_0; \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Қосалқы есеп

$$\begin{aligned} f_{\min} &= YA_0; \\ YA &\geq C; \\ Y &\geq 0. \end{aligned}$$

Сонымен, берілген бастапқы есеп үшін қосалқы есепті жазудан алдын, бастапқы есептің шектеулер жүйесін сәйкес түрге келтіріп алу қажет. Мысалы, келесі бастапқы есеп үшін қосалқы есептің математикалық моделін жазамыз.

Мысал 1. $Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3$ сызықты функциясының минималды мәнін

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

шектеулерде табу қажет.

Қаралып жатқан есеп симметриялық қосалқы есептердің сызықты функцияның минималды мәнін табуға жатады. Қосалқы есепті жазу үшін, оның моделі (3) түрде болуы қажет. Оған өту бірінші теңсіздікті -1-ге көбейту арқылы орындалады.

Бастапқы есеп. $Z_{\min} = 2x_1 + x_2 + 5x_3$ шектеулерде

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Қосалқы есеп. $f_{\max} = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3$ шектеулерде

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5, \end{cases} \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Мысал 2. Берілген есепке қосалқы есеп құрыңыз:

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Шешуі. Бірінші шектеуді, яғни теңсіздікті -1-ге көбейтеміз. Есеп (3) симметриялық қосалқы есептер жұбының бастапқы есебі түріне келеді:

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \geq -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8, \end{cases} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3).$$

Шектеудің оң жақ бөлігін қосалқы есептің сәйкес айнымалыларына көбейтеміз және оларды қосамыз. Онда

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \rightarrow \max$$

мақсат функциясын аламыз.

Бастапқы есептің мақсат функциясы минимумдалғандықтан, $F(Y)$ функциясы максималданады. Шектеулер жүйесінде x_1 -дегі коэффициенттерді қосалқы есептің сәйкес айнымалыларына көбейтіп және оларды қосып, $-2y_1 + 1 * y_2 + 1 * y_3$ аламыз. Бұл қосынды $-2y_1 + y_2 + y_3 \leq 5$ мақсат функциясының x_1 -дегі коэффициентіне тең немесе кіші. Теңсіздік « \leq » түріне ие, себебі қосалқы есептің мақсат функциясы максималданады. Дәл осылай қосалқы есептің келесі екі шектеуі құрылады (x_2, x_3 айнымалыларына сәйкес келеді):

$$\begin{aligned} -1 * y_1 + 2y_2 - 1 * y_3 &\leq 2, \\ 1 * y_1 + 1 * y_2 + 2y_3 &\leq 3. \end{aligned}$$

Бастапқы есептегі барлық шектеулер теңсіздік болғаны үшін, қосалқы есептің барлық айнымалылары теріс еместік шартын қанағаттандырады.

Соңында қосалқы есеп келесі түрге келеді:

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \leq 5, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2, \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3, \\ y_i \geq 0 \quad (i=1,2,3). \end{cases}$$

Мысал 3. Берілген есепке қосалқы есеп құрыңыз:

$$Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{cases} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

Шешуі. Берілген есеп қосалқы есептердің бірінші симметриялық емес жұбының (1) бастапқы есебі түріне ие. Қосалқы есепті жазамыз:

$$F(Y) = 17y_1 + 11y_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 7y_1 + 5y_2 \leq 2, \\ 5y_1 + 3y_2 \leq -2, \\ 3y_1 + y_2 \leq -4, \\ 2y_1 + 2y_2 \leq 6. \end{cases}$$

y_1 және y_2 айнымалылары теріс емес шартын қанағаттандырмауы тиіс, себебі олар бастапқы есептің шектеулері – теңсіздіктерге сәйкес келеді.

Мысал 4. Берілген есепке қосалқы есеп құрыңыз:

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3). \end{cases} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

Шешуі. Қосалқы есептерді құрудың жалпы ережелерін қолданамыз. Есеп минимумға болғаны үшін теңсіздік « \geq » түрінде болуы тиіс, онда екінші шектеу – теңсіздікті -1-ге көбейтеміз (3-нші ережеге қараңыз). Бастапқы есеп келесі түрге келеді:

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3). \end{cases} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

Қосалқы есепті құрамыз:

$$F(Y) = 3 + y_1 - 7y_2 + 6y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 2, \\ -3y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 1, \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 6, \\ y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Шектеу – теңсіздікке сәйкес келетін y_1 айнымалысы кез келген таңбаға ие болуы мүмкін (1-нші ережеге қараңыз).

Келесі теореманы дәлелдеусіз келтіреміз.

Теорема 2.6.2. Егер қойылымда тиімді жоспардың компоненті бастапқы есептің шектеулер жүйесіндегі i -нші шектеуде теңсіздік болса, онда қосалқы есептің тиімді жоспарының i -нші компоненті нөлге тең.

Егер қосалқы есептің тиімді жоспарының i -нші компоненті оң таңбалы болса, онда бастапқы есептің i -нші шектеуі тиімді шешімнің қатаң теңдігімен қанағаттандырылады.

2.7 Сызықты программалау есебін шешу үшін «Шешімді іздеу» қондырмасынан пайдалану

ҚЫСҚАША АНЫҚТАМА

Шешімді іздеу (Поиск решения) – бұл сызықты емес және сол сияқты сызықты программалау есебін жалпы жағдайда шешетін EXCEL-дің қуатты құралы. *Шешімді іздеу* нұсқауы *Сервис* мәзірінде орналасқан. Егер ол жерде жоқ болса, онда сол мәзірде *Қосымшалар (Надстройки)* нұсқауын тандап және пайда болған сұхбаттық терезенің тізіміндегі *Шешімді іздеу* тармағына байрақша орнату қажет.

Шешімді іздеу қосымшаларының мағынасы. *Шешімді іздеу* қосымшалары көмегімен шешілетін қарапайым есептер:

- Өнімнің түр-түрі. Осы тауарларды өндіру үшін шикізатқа қойылған шектеулерде тауарлар шығысын ұлғайту;
- Штаттық кесте. Штаттық кестені ең төменгі шығындарда, ең жақсы нәтижеге қол жеткізу үшін жасау;
- Тасымалдауды жоспарлау. Тауарларды тасымалдауда шығындарды азайту;
- Қоспаны дайындау. Қоспаның берілген шамасын ең төменгі шығындарда дайындау.

Осы құрал арқылы басқалардан оңай шешілетін есептер үш қасиетке ие болады. Біріншіден, жалғыз мақсат бар. Екіншіден, шектеулерге ие. Үшіншіден, шектеулерге және тиімділенетін шамаларға тікелей немесе жанама әсер ететін кіріс мәндері – айнымалылар бар.

ТАПСЫРМА

EXCEL электрондық кестесінің *Шешімді іздеу* құралын пайдаланып тиімділеу есебін шешу

1. *Шешімді іздеу* құралын пайдаланып есепті шешу

Есеп шарты: Фирма 2 түрлі балмұздақ шығарады: сары майлы және шоколадты. Балмұздақты дайындау үшін 2 түрлі бастапқы өнім қолданады: сүт және толтырғыштар. Олардың 1 кг балмұздыққа жұмсалатын шығыны және тәуліктік қоры кестеде берілген.

Бастапқы өнім	1 кг балмұздаққа жұмсалатын бастапқы өнімнің шығыны		Қор, кг
	Сары майлы	Шоколадты	
Сүт	0,8	0,5	400
Толтырғыштар	0,4	0,8	365

Сату нарығын зерттегенде, сары майлы балмұздаққа болатын тәуліктік сұраныс шоколадты балмұздақтың сұранысынан 100 кг-нан көп емес екендігін көрсетті. Ал шоколадты балмұздаққа болатын сұраныс тәулігіне 350 кг-нан аспайды. 1 кг сары майлы балмұздақтың бөлшек саудасынан түсетін пайда 16 ақша бірлігі, ал шоколадты балмұздақтан – 14 ақша бірлігі.

Фирма өнімдерін сатудан түскен пайда ең жоғары болуы үшін, балмұздақтың әрбір түрінен қанша өндірілуі тиіс (қорларды ескере отырып)?

2. Алынған нәтижені түсіндіру

Ескерту: Белгілеулер енгіземіз: x_1 - сары майлы балмұздақ өндірісінің бір тәуліктегі көлемі, кг; x_2 - шоколадты балмұздақ өндірісінің бір тәуліктегі көлемі, кг. Есептің математикалық моделін құрамыз.

Мақсат функциясы келесі түрде болады:

$$L(x) = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

шектеулерде:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400, & (\text{сүт бойынша шектеу}) \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365, & (\text{толтырғыштар бойынша шектеу}) \\ x_1 - x_2 \leq 100, & (\text{сұраныс бойынша нарықтық шектеу}) \\ x_2 \leq 350, & (\text{сұраныс бойынша нарықтық шектеу}) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$



ЖҰМЫС ТЕХНОЛОГИЯСЫ

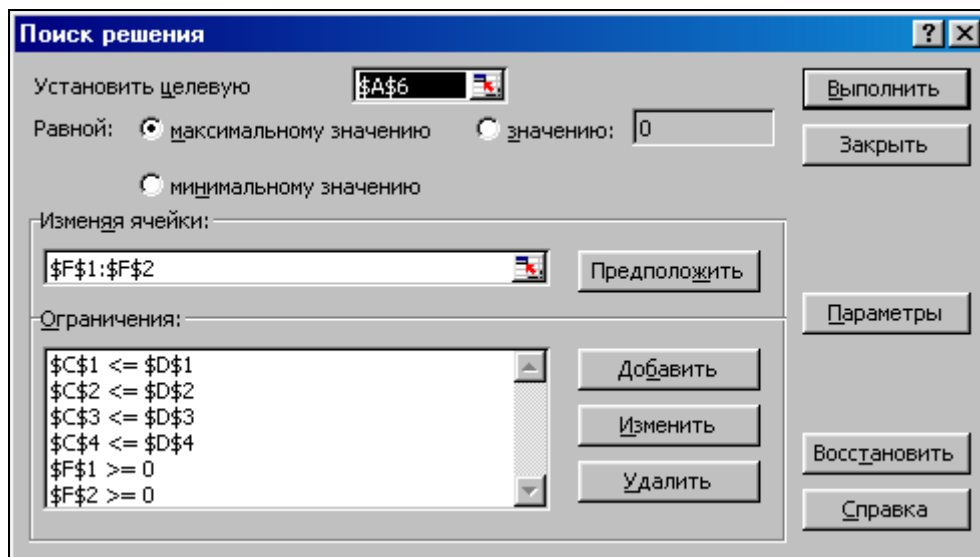
1. A1:B4 ұяшықтарға x_1 , x_2 -дегі коэффициенттерді, ал D1:D4 ұяшықтарға есептің алынған математикалық моделіндегі еркін айнымалыларға сәйкес коэффициенттерді енгіземіз;
2. Есептің шешімі EXCEL-дің F1 және F2 ұяшықтарында шығады деп болжаймыз. Бұл болжамды есепті шешудегі барлық келесі кезеңдерінде қолданамыз. Нәтижеде 3-ші кезеңге өтеміз;
3. C1 ұяшыққа $=A1*\$F\$1+B1*\$F\2 формуласын енгіземіз. Әрі қарай, EXCEL-дің автотолтыру қасиетін пайдалана отырып, C2, C3, C4 ұяшықтарын толтырамыз;
4. A6 ұяшығына мақсат функциясын, дәлірек айтсақ, $=16*F1 + 14*F2$ формуласын енгіземіз. Барлық 4 кезең орындалғасын EXCEL терезесінде 2.15-суреттегі бейне пайда болады.

	A	B	C	D	E	F
1	0,8	0,5	$=A1*\$F\$1+B1*\$F\2	400		
2	0,4	0,8	$=A2*\$F\$1+B2*\$F\2	365		
3	1	-1	$=A3*\$F\$1+B3*\$F\2	100		
4	0	1	$=A4*\$F\$1+B4*\$F\2	350		
5						
6	$=16*F1 + 14*F2$					

Сурет 2.15 - «Шешімді іздеу» құралын пайдалануға қажетті есептеу кестесі

Ескерту: Есептеу кестесін толтырғаннан кейін, C1:C4 аймағында және A6 ұяшығында бастапқыда 0-ге тең мәндер шығады. Дегенмен, *Шешімді іздеу* нұсқауын қолданғасын, бұл ұяшықтар, үлкен практикалық қызығушылық тудыратын, нақты сандық мәндермен толады.

5. *Сервис* мәзірінде *Шешімді іздеу* нұсқауын таңдаймыз. Пайда болған «Шешімді іздеу» сұхбаттық терезесін 2.16-суретте көрсетілгендей толтырамыз.



Сурет 2.16 - «Шешімді іздеу» сұхбаттық терезесі
(есеп мәліметтерімен)

6. Орындау (Выполнить), Сақтау (Сохранить) нұсқауларын орындасақ, F1, F2, A6 ұяшықтарында сәйкес 312,5; 300; 9200 мәндері пайда болады. Осы мәндер есептің шешімі болып саналады.

Есептің экономикалық мағынасы: Фирма тәулігіне 312,5 кг сары майлы балмұздақ және 300 кг шоколадты балмұздақ өндіру қажет. Сонда балмұздақ сатудан түсетін пайда 9200 ақша бірлігін құрайды.

ҚОРЫТЫНДЫ. Құралды қолдану тиімділік есептерін шешуге қолайлы және ауқымды есептеу үдерісін жеткілікті түрде азайтуға ықпал етеді.

3 Сызықты программалаудың көлік есебі

Қазіргі таңда сызықты программалаудың көлік есебі теориялық жұмыстарда, сондай-ақ, әр түрлі экономикалық үдерістерді жоспарлау практикасында кеңінен қолданылады. Ол әсіресе, аса қажетті ірі өнеркәсіптік және ауыл шаруашылығы өнімдерін жеткізуді ұтымды ұйымдастыруда, сонымен қатар, жүк ағындарын тиімді жоспарлау және көлік түрлерінің әртүрлі жұмыс режимдерінде ерекше мәнге ие.

3.1. Есептің қойылымы және оның математикалық моделі

Қандайда-бір біртекті өнім, A_i жеткізушілерде сәйкес a_i ($i=1,2,\dots,m$) бірлік санында шоғырланған. Оны B_j тұтынушыларға b_j ($j=1,2,\dots,n$) бірлік санында жеткізу қажет. i -нші жеткізушіден j -нші тұтынушыға жүк бірлігінің C_{ij} тасымалдау құны белгілі. Барлық жүктерді жеткізетін, қажеттіліктерді толық қанағаттандыратын және ең төменгі құнға ие тасымалдау жоспарын құру қажет. x_{ij} арқылы - i -нші жеткізушіден j -нші тұтынушыға тасымалдауға жоспарланған жүк бірлігінің санын белгілейміз. Онда есептің шартын кесте түрінде жазуға болады (3.1-кесте). Бұл кестені бұдан кейін *жоспарлау матрицасы* деп атаймыз.

Кесте 3.1

Жеткізушілер	Тұтынушылар				Қорлар
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	...	C_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	...	C_{2n} x_{2n}	a_2
\vdots \cdot	\vdots \cdot
A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	...	C_{mn} x_{mn}	a_m
Қажеттіліктер	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Есептің математикалық моделін құрамыз. i -нші жеткізушіден j -нші тұтынушыға x_{ij} жүк бірлігін тасымалдау жоспарланған. Сондықтан

тасымалдау құны $C_{ij}x_{ij}$ -ді құрайды. Барлық жоспардың құны екі еселенген қосындымен беріледі:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij} .$$

Шектеулер жүйесін есептің келесі шарттарынан аламыз:

а) барлық жүктер шығарылуы тиіс, яғни

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(бұл теңдеулер 3.1-кестенің қатарларынан алынған);

б) барлық қажеттіліктер қанағаттандырылуы тиіс, яғни

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(теңдеулер 3.1-кестенің бағандарынан алынған).

Сонымен, көлік есебінің математикалық моделі келесі түрге келеді:
Сызықты функцияның

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij} \tag{3.1.1}$$

шектеулерде

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{3.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{3.1.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ең кіші мәнін табу қажет.

Қаралған модельде жүк қорлардың қосындысы қажеттіліктер қосындысына тең деп болжаймыз, яғни

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j . \tag{3.1.4}$$

Мұндай модель *жабық* деп аталады.

Теорема 3.1. Кез келген көлік есебінің қорлардың жалпы көлемі қажеттіліктердің жалпы көлеміне сәйкес келгенде шешімге ие.

Теореманы дәлелдеу үшін, берілген шарттарда кемінде бір есептің жоспары бар және сызықты функция жоспарлар жиынында шектеген екендігін көрсету қажет.

Дәлелдеу. Айталық, $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = M > 0$ болсын. Онда $x_{ij} = a_i b_j / M$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) шамалары жоспар болады. Өйткені, олар (3.1.2) және (3.1.3) шектеулер жүйесін қанағаттандырады. Шындығында да, x_{ij} мәнін (3.1.2) және (3.1.3) қойсақ, аламыз:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j.$$

C_{ij} мәндері ішінен ең үлкен $C' = \max C_{ij}$ таңдап аламыз және (3.1.1) сызықты функцияның барлық коэффициенттерін C' -ға алмастырамыз. Онда, (3.1.2)-ні есепке ала отырып, аламыз

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \leq C' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C' \sum_{i=1}^m a_i = C' M.$$

Енді, C_{ij} мәндері ішінен ең кіші $C'' = \min C_{ij}$ таңдап аламыз және (3.1.1) сызықты функцияның барлық коэффициенттерін C'' -ға алмастырамыз. Онда, (3.1.2)-ні есепке ала отырып, аламыз

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \geq C'' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^m a_i = C'' M.$$

Соңғы екі теңсіздікті біреуге біріктіріп, түпкілікті аламыз

$$C'' M \leq Z \leq C' M,$$

яғни сызықты функция көлік есебінің жоспарлар жиынында шектелген.

Дербес көлік есебін екі жіберу тармағы және үш жеткізу тармағы үшін тұжырымдаймыз.

Есеп 1. Екі A_1 және A_2 жіберу тармақтарында қандайда бір біртекті жүктің сәйкес a_1 және a_2 бірлігі шоғырланған. Бұл жүктердің әр бірін b_1, b_2, b_3 бірлігінде сәйкес B_1, B_2, B_3 тармақтарына жеткізу қажет. Жүк бірлігін A_i тармағынан B_j тармағына тасымалдау құны (c_{ij} -ге тең) берілген деп есептейміз (3.2-кесте).

Кесте 3.2

Жіберушілер	Тұтынушылар			Қорлар
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
Жүкке болған қажеттілік	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

Жіберу тармақтарындағы жүктердің жалпы қоры осы жүктердің барлық қабылдау тармақтарындағы қажеттіліктерінің қосындысына тең деп есептейміз: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$. Жалпы құны ең кіші болатын тасымалдау жоспарын құру талап етіледі.

x_{ij} арқылы - A_i тармағынан B_j тармағына тасымалдауға жоспарланған жүк бірлігінің санын белгілейміз. Онда A_1 және A_2 тармақтарынан B_1 тармағына жеткізілу жоспарланған жүктің саны $x_{11} + x_{21}$ құрайды. Бірақта, B_1 тармағында жүкке болған қажеттілік b_1 -ге тең болғандықтан, $x_{11} + x_{21} = b_1$ теңдік орындалуы тиіс. Дәл осылай пайымдаулар келесі теңдіктерге әкеледі: $x_{12} + x_{22} = b_2$, $x_{13} + x_{23} = b_3$.

Екінші жағынан, A_1 тармағынан жіберілген жүктің жалпы саны - $a_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$, ал A_2 тармағынан B_1, B_2, B_3 тармақтарына жіберілгені $a_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$.

Барлық тасымалдың жалпы құны

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_{ij}.$$

Демек, екі жіберу тармағы және үш жеткізу тармағы үшін математикалық есеп былай тұжырымдалады.

Алты белгісіз айнымалысы, бес теңдеуі бар сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} = b_3, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \end{cases}$$

және сызықты қалып

$$f = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

берілген.

Жүйенің барлық теріс емес x_{ij} шешімдері ішінен f сызықты қалып минималды мән қабылдайтын шешімді таңдап алу талап етіледі.

3.2 Бастапқы тірек жоспарын құру

Сызықты програмалаудың басқа есептері сияқты, көлік есебінің тиімді жаспарын іздеу үшін итерациялық үдерісті тірек жоспарды табудан бастайды.

Көлік есебінің (3.1.2) және (3.1.3) шектеулер жүйесін қарастырамыз. Ол (3.1.4) қатынаспен байланысқан, $m \times n$ белгісіз айнымалы және $m + n$ теңдеуден тұрады. Егер (3.1.2) ішкі жүйесін бөлек және (3.1.3) ішкі жүйесін бөлек теңдеуде мүшелеп қоссақ, онда екі бірдей теңдеулерді аламыз. Мұндай қосу 3.1-кестеде сәйкес бағандарды мүшелеп қосуға және қатарларды мүшелеп қосуға тең.

Шектеулер жүйесінде екі бірдей теңдеулердің бар екендігі олардың сызықты тәуелділігін білдіреді. Егер осы теңдеулердің біреуін алып тастасақ, онда жалпы жағдайда шектеулер жүйесі $m + n - 1$ сызықты тәуелсіз теңдеулерден тұрады. Сондықтан, көлік есебінің нұқсанды емес тірек жоспары $m + n - 1$ оң таңбалы компонент немесе тасымалдаудан тұрады.

Сонымен, егер қандайда бір тәсілмен көлік есебінің нұқсанды емес тірек жоспары алынған болса, онда (x_{ij}) ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) матрицасында оның компоненттері мәндерінің (3.1-кесте) тек $m + n - 1$ ғана оң таңбалы болады, ал қалғандары нөлге тең.

Егер көлік есебінің шарты мен оның тірек жоспары кесте түрінде жазылған болса (3.1-кесте), онда нөлден айрықша тасымалдаулар орналасқан ұяшықтар *бос емес*, ал қалғандары – *бос* деп аталады. Бос емес ұяшықтар базистік белгісіздерге сәйкес келеді және нұқсанды емес тірек жоспарында олардың саны $m + n - 1$ -ге тең. Егер көлік есебінің шектеулері (3.1.2) және (3.1.3) түрінде жазылған болса, онда, белгілі болғандай, тірек жоспарына енгізілген базистік белгісіздерге сызықты тәуелсіз векторлардың жүйесі

сәйкес келеді. Көлік есебінің шарттарын кесте түрінде жазуда (3.1-кесте) жоспардың тірек екендігі оның қайталанбауынан келіп шығады, яғни кестеде барлық төбелері бос емес ұяшықтарда жататын, тұйықталған цикл құру мүмкін емес.

Цикл деп $(i_1 j_1)(i_1 j_2) \times (j_2 i_2)(j_1 i_m)$ түріндегі ұяшықтар жиынтығын айтады, мұндағы екі және тек қана екі көрші ұяшықтар кестенің бір бағанында немесе бір қатарында орналасқан. Сондай-ақ, соңғы ұяшық - бірінші ұяшық орналасқан қатарда немесе бағанда орналасады. Цикл құруды қандайда бір бос емес ұяшықтан бастайды және баған (қатар) бойынша келесі бос емес ұяшыққа өтеді. Өтуде тік бұрышты бұрылыс жасап, қатар (баған) бойынша келесі бос емес ұяшыққа қарай қозғалады. Осылай жалғастырып, бастапқы ұяшыққа қайтуға ұмтылады. Егер қайту мүмкін болса, онда цикл алынған және жоспар тірек емес болып саналады. Тік бұрышты бұрылу орындалған ұяшықтар циклдің төбесін анықтайды. Кері жағдайда жоспар тірек болып саналады.

Көлік есебінің $m + n - 1$ -ден көп бос емес ұяшықтары бар кез келген жоспары тірек болмайды. Өйткені оған сызықты тәуелді векторлар жүйесі сәйкес келеді. Мұндай жоспарда кестеде әрқашан тұйықталған цикл құруға болады. Цикл көмегімен бос емес ұяшықтар санын $m + n - 1$ -ге дейін азайтады.

Егер нұқсанды емес тірек жоспарды анықтайтын бос емес, демек, әрі циклдік емес ұяшықтарды, қандайда бір бос ұяшыққа қоссақ, онда жоспар тірек емес болып, бір төбесінен басқа барлық төбелері бос емес ұяшықтарда жататын, жалғыз цикл пайда болады.

Көлік есебінің бастапқы тірек жоспарын, сызықты программалаудың есебі сияқты, бұрын қарастырған әдістермен құруға болады, дегенмен, олар көп есептеулерді қамтиды. Көлік есебінің бастапқы тірек жоспарын құру үшін бірнеше қарапайым сұлбалар жасалған. Оларды мысалдарда қарастырамыз.

Солтүстік-батыс бұрыш әдісі. Айталық, көлік есебінің шарттары 3.3-кестеде берілген болсын. Жүк бірлігін тасымалдау құнын есепке алмай отырып, бірінші B_1 тұтынушының қажеттілігін A_1 жіберуші қоры есебінен қанағаттандыруды бастаймыз. Ол үшін $a_1 = 100$ -ді $b_1 = 200$ -бен салыстырып, $a_1 < b_1$, көлемдер ішінен кішісін, яғни 100 бірлікті $A_1 B_1$ ұяшығының сол жақ төменгі бұрышына жазамыз. Бірінші жіберушінің қоры толық таусылды, сондықтан бірінші қатардың қалған ұяшықтарын сызып тастаймыз. B_1 -дің қажеттілігі $200 - 100 = 100$ бірлікке қанағаттандырылмады. Осы қалдықты A_2 жіберушінің қорынмен салыстырамыз, $100 < 250$ болғандықтан, 100 бірлікті $A_2 B_1$ ұяшығына жазамыз. Осымен B_1 тұтынушының қажеттілігін толық қанағаттандырамыз, ал бірінші бағандағы қалған ұяшықтарды сызып тастаймыз.

A_2 жіберушіде 150 жүк бірлігі қалды. B_2 тұтынушыны A_2 жіберушіде қалған жүк есебінен қанағаттандырамыз. Ол үшін осы қалдықты B_2 тұтынушының қажеттілігімен салыстырамыз: $150 < 200$, A_2B_2 ұяшыққа 150 бірлікті жазамыз, және A_2 -нің қоры толық таусылғандықтан, екінші қатардағы қалған ұяшықтарды сызып тастаймыз. B_2 -нің қажеттілігі 50 бірлікке қанағаттандырылмай қалды. Оларды A_3 жіберуші есебінен қанағаттандырамыз және B_3 -ті A_3 жіберушіде қалған қалдық есебінен қанағаттандыруға өтеміз, т.с.с. Үдерісті барлық тұтынушыларды жіберушілер қоры есебінен қанағаттандырғанша жалғастырамыз. Осымен бастапқы тірек жоспарын құру аяқталады.

Кесте 3.3

Жіберушілер	Тұтынушылар					Қорлар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 —	4 —	1 —	4 —	100
A_2	2 100	7 150	10 —	6 —	11 —	250
A_3	8 —	5 50	3 100	2 50	2 —	200
A_4	11 —	8 —	12 —	16 50	13 250	300
Қажеттіліктер	200	200	100	100	250	850

Сонымен, 3.3-кестеде ұяшықтардың оң жақ жоғарғы бұрыштарында - жүк бірлігінің тасымалдау құнын анықтайтын сандар, ал сол жақ төменгі бұрыштарда – тасымалдау жоспарын анықтайтын сандар тұрады. Өйткені, олардың қатарлар бойынша қосындысы сәйкес жіберушілердің қорына, ал бағандар бойынша қосындысы – сәйкес тұтынушылардың қажеттіліктеріне тең.

3.3-кестеде құрылған жоспар тірек бола ма, осыны тексереміз. Бос емес A_1B_1 ұяшықтан басталған қозғалыс, тек қана оған қайтпайтынын көреміз. Дегенмен, басқа кез келген бос емес ұяшыққа, бос емес ұяшықтармен қозғала отырып қайту мүмкін емес. Сондықтан жоспар тірек болып саналады. Сонымен қатар, жоспар нұксанды емес, өйткені дәл $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ бос емес ұяшықтан тұрады.

Бастапқы тірек жоспарын солтүстік-батыс бұрышы әдісімен құруда жүк бірлігінің тасымалдау құнын есепке алмадық, онда үлкен көлемді есептеу жұмыстарымен байланысты құрылған жоспар тиімді емес. Сондықтан қаралған әдіс компьютер көмегінде есептеулерде қолданылады.

Құрылған жоспардың жалпы құнын, бос емес ұяшықтардың сол жақ бұрышында тұрған тасымалдау көлемдерін, сол ұяшықтарда тұрған сәйкес құндарына көбейтіп, қосынды ретінде табамыз:

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950$$

(құн бірлігі).

Егер тірек жоспарды құруда жүк бірлігінің тасымалдау құнын есепке алсақ, онда тірек жоспардың тиімді жоспарға жақынырақ болатыны белгілі.

Минималды құн әдісі. Әдістің мағынасы, барлық құндар кестесі ішінен ең кішісін таңдап алады және соған сәйкес ұяшыққа a_i немесе b_j сандарының ең кішісін жайғастырады. Содан соң, қорлары толық таусылған жіберушіге сәйкес қатарды, немесе қажеттілігі толық қанағаттандырылған тұтынушыға сәйкес бағанды, немесе қорлары толық таусылған жіберуші қатары мен қажеттілігі толық қанағаттандырылған тұтынушы бағанын қарастырмайды. Құндар кестесінің қалған бөлігі ішінен тағы да ең кіші құнды таңдайды, және барлық қорлар таратылып, ал қажеттіліктер қанағаттандырылғанша, қорларды үлестіру үдерісін жалғастыра береді.

Осы әдіс көмегінде жоғарыда қарастырылған есептің тірек жоспарын құрамыз. Оның шарттарын кестеге жазамыз (3.4-кесте). Кестедегі ең кіші құнды таңдаймыз (бұл құн A_1B_4 ұяшығына орналасқан). $a_1 = b_4$ болғандықтан, 100 бірлік жүкті осы ұяшыққа орналастырамыз және бірінші қатар мен төртінші бағанды қарастырудан шығарамыз. Құндар кестесінің қалған бөлігінде A_2B_1 ұяшығында және A_3B_5 ұяшығында орналасқан құн ең кіші болады. Олардың кез келгенін толтырамыз, мысалы A_2B_1 . Онда $200 < 250$ аламыз, сондықтан оған 200-ді жазамыз және B_1 бағанды қарастырудан шығарамыз. A_3B_5 ұяшығына 200 бірлікті жазамыз және A_3 қатарын қарастырудан шығарамыз. Құндар кестесінің қалған бөлігінен тағы да ең кіші құнды таңдаймыз және барлық қорлар таратылып, ал қажеттіліктер қанағаттандырылғанша, үдерісті жалғастыра береміз. Нәтижеде

$$X = (x_{14} = 100; x_{21} = 200; x_{22} = 50; x_{35} = 200; x_{42} = 150; x_{43} = 100; x_{45} = 50)$$

жоспары алынды, қалған айнымалылардың мәндері нөлге тең.

Кесте 3.4

Жіберушілер	Тұтынушылар					Қорлар
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	10 —	7 —	4 —	1 100	4 —	100
A ₂	2 200	7 50	10 —	6 —	11 —	250
A ₃	8 —	5 —	3 —	2 —	2 200	200
A ₄	11 —	8 150	12 100	16 —	13 50	300
Қажеттіліктер	200	200	100	100	250	850

Жоспарда циклдар кездеспейді және ол жеті оң таңбалы тасымалдаудан тұрады, демек, нұсқансыз тірек жоспары болып табылады. Оның құнын анықтаймыз:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300 \text{ (бірлік)}.$$

Қос белгілеулер әдісі. Егер құндар кестесі ауқымды болса, онда барлық элементтерді қарап шығу қиынға соғады. Мұндай жағдайда қос белгілеулер әдісін қолданады.

Әдістің мағынасы төмендегідей: әрбір бағандағы ең кіші құн жазылған ұяшықты V таңбасымен белгілейді. Одан кейін дәл осылай әрбір қатарда орындайды. Нәтижеде кейбір ұяшықтар VV қос таңбасымен белгіленеді. Оларда әрі баған, әрі қатар бойынша минималды құн орналасқан. Осы ұяшықтарға тасымалдаудың максималды мүмкін көлемдерін жазады және әр кезде сәйкес баған мен қатарларды қарастырудан шығарып отырады. Содан соң V таңбасымен белгіленген ұяшықтарға тасымалдауларды үлестіреді. Кестенің қалған бөлігіне тасымалдауларды ең кіші құн бойынша үлестіреді.

Қос белгілеулер әдісін шарттары 3.5-кестеде жазылған есепке қолданайық.

Кесте 3.5

Жіберу шілер	Тұтынушылар					Қорлар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 —	7 —	4 —	VV 1 100	4 —	100
A_2	VV 2 200	7 —	10 50	6 —	11 —	250
A_3	8 —	V 5 —	V 3 —	V 2 —	VV 2 200	200
A_4	11 —	8 200	12 50	16 —	13 50	300
Қажетті ліктер	200	200	100	100	250	850

Алғашында A_2B_1 , A_1B_4 , A_3B_5 ұяшықтарын, содан кейін A_4B_2 ұяшығын толтырамыз. Кестенің қалған бөлігіне минималды құн бойынша A_2B_3 , A_4B_3 , A_4B_5 ұяшықтарын кезекпен толтырамыз. 3.5-кестеде алынған жоспар нұқсанды тірек жоспар болып табылады. Оның құнын есептейміз:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4250 \text{ (бірлік)}.$$

Сонымен, қос белгілеулер әдісімен алынған тірек жоспар ең кіші құнға ие. Сондықтан ол тиімді жоспарға ең жақын болып есептеледі.

Қарастырылған бастапқы жоспарды құру әдістері көмегінде нұқсанды немесе нұқсанды емес тірек жоспарды алуға болады. Көлік есебінің құрылған тірек жоспарын сызықты программалаудың есебі ретінде симплекс әдісімен тиімділікке дейін жеткізуге болар еді. Алайда, $m \cdot n$ белгісізден тұратын симплекс кестенің ауқымдылығынан және тиімді жоспарды алу үшін орындалатын үлкен көлемді есептеу жұмыстарынан қарапайым әдістер қолданылады. Олардың ішінде ең көп таралғаны потенциалдар әдісі (түрлендірілген үлестіру әдісі) болып есептеледі.

3.3 Потенциалдар әдісі

Теорема 3.2. Егер көлік есебінің $X^* = (x_{ij}^*)$ жоспары тиімді болса, онда оған U_i^* және V_j^* $m+n$ сандар жүйесі сәйкес келеді және олар келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij} \text{ барлық } x_{ij}^* > 0 \text{ үшін}$$

және

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \text{ барлық } x_{ij}^* = 0 \text{ үшін} \\ (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

U_i^* және V_j^* сандарын сәйкес жеткізушілер мен тұтынушылардың потенциалдары деп аталады.

Дәлелдеу. Сызықты функцияны

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

келесі шектеулерде

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

минимумдайтын көлік есебін, қандайда бір сызықты программалаудың бастапқы есебінің қосалқысы ретінде қарауға болады. Егер бастапқы есепте $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$ түріндегі әрбір шектеуге U_i ($i = 1, 2, \dots, m$) айнымалысы, ал $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$ түріндегі әрбір шектеуге V_j ($j = 1, 2, \dots, n$) айнымалысы сәйкес келсе және

$$f = \sum_{i=1}^m a_i U_i + \sum_{j=1}^n b_j V_j$$

сызықты функциясын

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

шектеулерде максималдау қажет болса, онда шарттарды 2.6-да қарастырылған жалпы сұлба бойынша алуға болады. Жоспар X^* - қосалқы есептің тиімді жоспары, сондықтан $Y^* = (U_i^*, V_j^*)$ бастапқы есептің жоспары болады және қосалқылық теоремасы негізінде

$$\max f = \min Z$$

немесе

$$\sum_{i=1}^m a_i U_i^* + \sum_{j=1}^n b_j V_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}^*, \quad x_{ij}^* \geq 0.$$

2.6.2-нші теорема негізінде, қосалқы есептің тиімді жоспарының оң таңбалы компоненттеріне сәйкес келетін бастапқы есептің шектеулері қатаң теңдік түрінде қанағаттандыратынын, ал сәйкес нөлге тең компоненттерге – теңсіздіктерді, яғни

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij} \text{ барлық } x_{ij}^* > 0 \text{ үшін}$$

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \text{ барлық } x_{ij}^* = 0 \text{ үшін}$$

аламыз.

Дәлелденген теорема негізінде, бастапқы тірек жоспары тиімді болу үшін, келесі шарттар орындалуы қажет:

а) әрбір бос емес ұяшықтың потенциалдар қосындысы, осы ұяшықта тұрған тасымалдау бірлігі құнына тең болуы тиіс:

$$U_i + V_j = C_{ij}; \quad (3.1.5)$$

б) әрбір бос ұяшықтың потенциалдар қосындысы, осы ұяшықта тұрған тасымалдау бірлігі құнынан кіші немесе тең болуы тиіс:

$$U_i + V_j \leq C_{ij}. \quad (3.1.6)$$

Егер кемінде бір бос ұяшық (3.1.6) шартын қанағаттандырмаса, онда тірек жоспары тиімді емес болады және тиімділік шарты бұзылатын ұяшыққа сәйкес келетін векторды базиске енгізу арқылы, оны жақсартуға болады (яғни ұяшыққа жүк бірлігінің қандай да бір санын көшіру арқылы).

Сонымен, жоспарды тиімділікке тексеру үшін, алғашында потенциалдар жүйесін құру қажет. Потенциалдар әдісі алгоритмін қарастырамыз және бір уақытта оны 3.4-кестеде алынған тірек жоспарында қолдануды бейнелейміз.

Ол үшін кестеге потенциалдар мәні жазылған қатар мен бағанды қосамыз (нәтижеде 3.6-кестені аламыз).

1. *Потенциалдар жүйесін құру.* Потенциалдар жүйесін құру үшін

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

шартын пайдаланамыз, мұндағы C_{ij} - i -нші қатардағы және j -нші бағандағы бос емес ұяшықтың жүк бірлігін тасымалдау құны.

Потенциалдар жүйесін тек қана нұқсанды емес тірек жоспарына құруға болады. Мұндай жоспар $m+n-1$ бос емес ұяшықтардан тұрады, сондықтан оған $n+m$ белгісіздері бар, (3.1.5) түріндегі $m+n-1$ сызықты тәуелсіз теңдеулерден тұратын жүйені құруға болады. Теңдеулер саны белгісіздерден біреуге кем, сондықтан жүйе анықталмаған болады және бір белгісізге (әдетте U_1) нөл мәні беріледі. Бұдан кейін басқа потенциалдар айқын анықталады.

Кесте 3.6

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Жіберушілер	v_j u_i	V $v_1=3$	V $v_2=8$	V $v_3=12$	V $v_4=13$	V $v_5=13$	
A_1	V $u_1=-12$	10	7	4	1	4	100
A_2	V $u_2=-1$	2	-7	10	+6	11	250
A_3	V $u_3=-11$	8	5	3	-2	+2	200
A_4	V $u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Қажеттіліктер		200	200	100	100	250	850

Айталық, U_i потенциалы белгілі болсын. Онда (3.1.5) теңдіктен $V_j = C_{ij} - U_i$ келіп шығады. Егер V_j потенциалы белгілі болса, онда осы теңдіктен $U_i = C_{ij} - V_j$ аламыз. Сонымен, белгісіз потенциалды анықтау үшін, бос емес ұяшықтың C_{ij} шамасынан белгілі потенциалды алу қажет.

3.6-кестеде тірек жоспары нұқсанды, өйткені бір бос емес ұяшық жетпейді. Сондықтан ең көп бос емес ұяшықтары бар қатарды таңдаймыз (A_4 қатары), және $U_4 = 0$ деп санаймыз. A_4 қатарындағы үш бос емес ұяшықтар (A_4B_2, A_4B_3 және A_4B_5), тиісінше U_4 потенциалын V_2, V_3, V_5 потенциалдарымен байланыстырады. Осы потенциалдарды анықтаймыз: $V_2 = C_{42} - U_4 = 8 - 0 = 8$, $V_3 = C_{43} - U_4 = 12 - 0 = 12$, $V_5 = C_{45} - U_4 = 13 - 0 = 13$.

U_4 потенциалы көмегімен тағы қандайда бір белгісіз потенциалды анықтау мүмкін емес, сондықтан оны V таңбасымен белгілейміз. Енді кезекпен B_2 , B_3 және B_5 бағандарын қарастырамыз. Олар үшін потенциалдар анықталып қойылған. B_2 бағанында V_2 потенциалын U_2 және U_4 потенциалдарымен байланыстыратын екі бос емес ұяшықтар бар (A_2B_2 және A_4B_2). U_4 потенциалы анықталып қойылған. A_2B_2 ұяшығына өтеміз және C_{22} көмегінде белгісіз потенциалды анықтаймыз: $U_2 = C_{22} - V_2 = 7 - 8 = -1$. Әрі қарай V_2 потенциалын V таңбасымен белгілейміз және B_3 бағанына өтеміз. Бұл бағанда V_3 -ті қатардың белгісіз потенциалдарымен байланыстыратын бос емес ұяшықтар жоқ. V_3 потенциалын V таңбасымен белгілейміз және B_5 бағанына өтеміз. Онда V_5 -ті U_3 белгісіз потенциалымен байланыстыратын бір бос емес (A_3B_5) ұяшық бар. Оны анықтаймыз: $U_3 = C_{32} - V_5 = 2 - 13 = -11$. U_3 потенциалын V таңбасымен белгілейміз және бағандардың белгісіз потенциалдарын пайдаланып болдық. Енді V таңбасымен әлі белгіленбеген қатарлардың белгілі потенциалдарына өтеміз. Содан кейін, оларға тиісті қатарларды қарастырамыз.

Бос емес A_2B_1 ұяшығындағы U_2 потенциалы V_1 белгісіз потенциалымен байланысқан. Осы потенциалды табамыз: $V_1 = 2 - (-1) = 3$. U_2 потенциалын V таңбасымен белгілейміз. A_3 қатарында U_3 потенциалын бағанның белгісіз потенциалымен байланыстыратын бос емес ұяшықтар жоқ. U_3 потенциалын V таңбасымен белгілейміз. Бағандардың V таңбасымен белгіленбеген белгілі потенциалдарына өтеміз (бұл V_1 потенциалы). Бірақта B_1 бағанында V_1 -ді қатардың белгісіз потенциалымен байланыстыратын бос емес ұяшықтар жоқ. Сондықтан V_1 потенциалын V таңбасымен белгілейміз. Потенциалдар жүйесін құру үзілді, U_1 және V_4 потенциалдары анықталмай қалды. Бұлай болған себебі, тірек жоспары нұқсанды (бір бос емес ұяшық жоқ). Нұқсанды түзету үшін, нөлдік тасымалдауларды енгізіп, бос емес ұяшықтар санын $m + n - 1$ -ге дейін толтырамыз. Нөлдік тасымалдаулар енгізілген ұяшықтарды *жалған түрде бос емес* деп атаймыз.

U_1 және V_4 потенциалдарды анықтау үшін, потенциалдардың бірі анықталған A_1 қатардың немесе B_4 бағанның бос ұяшықтарының бірін жалған түрде бос емес жасау қажет. Есеп сызықты функцияның минимумын табу үшін шешіледі. Сондықтан ең аз құн тұрған ұяшықты жалған түрде бос емес жасаған орынды.

A_1 қатардың немесе B_4 бағанның бос ұяшықтарында тұрған құндарды қарай отырып, A_3B_4 ұяшығына сәйкес келетін ең кіші құнды ($\min C_{ij} = 2$) таңдаймыз. Оған нөл жазамыз және бос емес деп есептейміз. Енді A_3B_4 ұяшығы V_4 потенциалын U_3 потенциалымен байланыстырады. Бұдан $V_4 = C_{34} - U_3 = 2 - (-11) = 13$. Сосын табамыз $U_1 = C_{14} - V_4 = 1 - 13 = -12$.

Потенциалдар жүйесі құрылды, потенциалдарды белгілеген V таңбасын өшіру керек. Жүйені құрудың дұрыстығын тексеріңіз. Ол үшін қатардың бос емес ұяшықтарын қарап шығамыз және әрбірі үшін потенциалдар қосындысын анықтаймыз. Егер барлық бос емес ұяшықтар үшін (3.1.5) теңдік орындалса, онда жүйе дұрыс құрылған, ал кері жағдайда оны қайта құру немесе (3.1.5) шарт орындалатындай өзгерту керек.

2. *Бос ұяшықтар үшін тиімділік шартының орындалуын тексеру.* Қатарларды қарап шығамыз және әрбір бос емес ұяшық үшін (3.1.6) шартының орындалуын тексереміз, яғни қиылысуында бос емес ұяшық тұрған потенциалдарды қосып, қосындыны сол жерде тұрған кұнмен салыстырамыз. Егер барлық бос емес ұяшықтар үшін $U_i + V_j \leq C_{ij}$ болса, онда жоспар тиімді (3.2-теоремаға қараңыз). Егер кейбір ұяшықтар үшін $U_i + V_j > C_{ij}$ болса, онда жоспар тиімді емес. Онда тиімділік шарты орындалмаған әрбір ұяшық үшін $(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ айырмасы шамасын табамыз және оның мәнін осы ұяшықтың сол жақтағы төменгі бұрышына жазамыз.

3.6-кестеде бос емес ұяшықтар үшін кезекпен табамыз: A_1 қатары үшін: $-9 < 10, -4 < 7, 0 < 4, -8 < 4$; A_2 қатары үшін: A_2B_3 ұяшық үшін $11 > 10$ немесе $11 - 10 = 1$ аламыз; тиімділік шарты бұзылды, бірге тең айырманы осы ұяшыққа жазамыз; A_2B_4 ұяшық үшін $12 > 6, 12 - 6 = 6$ аламыз, шарт тағы да бұзылды, алтыға тең айырманы осы ұяшыққа жазамыз; A_2B_5 ұяшық үшін $12 > 11, 12 - 11 = 1$ аламыз, бірге тең айырманы ұяшыққа жазамыз; A_3 қатары үшін: $-8 < 8, -3 < 5, 1 < 3$; A_4 қатары үшін: $3 < 11, 13 < 16$.

Сонымен, тиімділік шарты бұзылған үш ұяшық бар, олардағы айырма сәйкес түрде 1, 6 және 1.

3. *Тасымалдауды жіберу үшін қажетті ұяшықты таңдау.* Сызықты программалаудың көлік есебі сызықты функцияның минимумына шешіледі, сондықтан оны шешу алгоритмі де минимумға шешілетін есептердегі симплекс әдісі алгоритмінің жалпы принциптерінен келіп шығуы тиіс.

Егер бос емес ұяшықтарды базис құратын векторлармен, ал бостарын – шектеулер жүйесінің басқа векторларымен теңестірсек, онда сызықты программалаудың жалпы есебінде базиске $\max \theta_0 (Z_j - C_j)$ -ге сәйкес келетін вектор енгізіледі. Көлік есебінде Z_j мәні $(U_i + V_j)$ потенциалдар қосындысымен алмастырылған, сондықтан $\max [(U_i + V_j) - C_{ij}]$ сәйкес келетін ұяшықты бірінші орында жүктеу қажет.

Сонымен, қарастырылып отырған мысалда $\max(1; 6; 1) = 6$, сондықтан A_2B_4 ұяшығын бос емес жасау қажет. Ол үшін басында, оған қанша жүк бірлігін қайта үлестіру қажет екенін анықтап алу керек.

4. *Циклді құру және жүкті қайта үлестіру шамасын анықтау.* Қайта үлестіруді қажет ететін жүк бірлігі санын анықтау үшін, жүктеу қажет болатын бос ұяшықты «+» таңбасымен белгілейміз. Бұл ұяшықтың бос емес ұяшықтар қатарына қосылғанын білдіреді. Кестеде бос емес ұяшықтар $m + n$ болды, сондықтан «+» таңбасымен белгіленген ұяшықтан басқа барлық төбелері бос емес ұяшықтарда жататын цикл пайда болады, сонымен бірге бұл цикл жалғыз. Циклді іздестіреміз және қозғалысты «+» таңбасымен белгіленген ұяшықтан бастап, кезекпен «-» және «+» таңбаларымен белгілеп шығамыз. Сосын $\theta_0 = \min x_{ij}$ табамыз, мұндағы x_{ij} - циклдің төбелерінді тұратын, «-» таңбасымен белгіленген тасымалдаулар. θ_0 шамасы табылған цикл бойынша қанша жүк бірлігін қайта үлестіруге болатынын анықтайды. θ_0 шамасын цикл бойынша қозғала отырып, «+» таңбасымен белгіленген бос ұяшыққа жазып, «-» таңбасымен белгіленген ұяшықтарда орналасқан тасымалдау көлемдерінен θ_0 шамасын шегереміз және «+» таңбасымен белгіленген ұяшықтарда орналасқан тасымалдау көлемдеріне θ_0 шамасын қосамыз. Егер θ_0 бірнеше минималды тасымалдауларға сәйкес келсе, онда шегеруде сәйкес ұяшықтарда нөлдік тасымалдаулар санын, жаңадан алынған тірек жоспарында бос емес ұяшықтар саны $m + n - 1$ болатындай етіп қалдырамыз.

Қарастырылып отырған мысалда A_2B_4 ұяшығын «+» таңбасымен белгілеп, 3.6-кестеде келтірілген циклді табамыз. $\theta_0 = \min(50; 50; 0) = 0$ аламыз, яғни нөлдік тасымалдауды A_2B_4 ұяшығына ауыстыру қажет. Басқа сандардың нөлді қосуда және шегеруде өзгермейтіні анық.

5. θ_0 -ді қайта үлестіру нәтижесінде жаңа нұқсансыз тірек жоспары алынды (3.7-кесте). Оны тиімділікке қайта тексеру қажет. Жаңа тірек жоспарын тиімділікке тексеру үшін, потенциалдар жүйесін қайтадан құрып, әрбір бос ұяшық үшін тиімділік шартының орындалуын тексеруге болады.

Егер алынған жоспар қайтадан тиімді емес болса, онда 4-қадамда келтірілген есептеулерді орындауға тура келеді. Үдерісті барлық бос емес ұяшықтар (3.1.6) шартты қанағаттандырғанша қайталайды. Тиімді жоспардағы барлық есептеулерді бір кестеде орындау ұсынылады, сондықтан x_{ij} , U_i , V_j , сонымен қатар V , «+» «-» таңбаларын қаламмен жазу және сосын өшіру керек.

Жаңа потенциалдар жүйесін құру және барлық бос ұяшықтарды тиімділікке тексеру бірталай уақытты қажет етеді, сондықтан есептеу жұмыстары көлемін айтарлықтай азайтуға мүмкіндік беретін, потенциалдар жүйесін өзгерту өзгерту тәртібін қарастырамыз.

6. *Потенциалдар жүйесін өзгерту.* 3.7-кестеде жазылған жаңа тірек жоспарында, қазірше ескі потенциалдар көрсетілген. Алдын A_2B_4 ұяшығы

бос еді, енді бос емеске айналды. Бос емес ұяшық үшін $U_i + V_j = C_{ij}$ шарты орындалуы қажет. Шындығында да $U_2 + V_4 = -1 + 13 = 12 \neq 6$. Сондықтан, не U_2 -ні, не V_4 -ті алтыға азайту қажет. Азайтуда, басқа потенциалдардың өзгеруі ең кіші болатын потенциалды азайту керек екендігі анық көрініп тұр. Сондықтан, егер V_4 өзгеріп, U_2 потенциалы сол күйі қалатын болса, онда тек қана U_1 потенциалы өзгеріске жатады, ал кері жағдайда барлық қалған потенциалдар өзгереді. U_2 потенциалын «!» таңбасымен, V_4 потенциалын «-» таңбасымен белгілейміз. A_1B_4 ұяшығы бос емес болғандықтан, V_4 потенциалының өзгеруі U_1 потенциалының өзгеруін талап етеді (оны «+» таңбасымен белгілейміз). Осымен өзгерістер тізбегі үзіледі.

Кесте 3.7

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Жіберушілер	$V_j \backslash U_i$	3	8	12	13 7	13	
A_1	12 + -6	10	7	4	-1	+4	100
A_2	-1!	2	-7	10	+6	11	250
A_3	-11	8	5	3	2	2	200
A_4	0	11	+8	12	16	13	300
Қажеттіліктер		200	200	100	100	250	850

Сонымен, «-» таңбасымен белгіленген потенциалдар мәні азаяды, ал «+» таңбасымен белгіленген потенциалдар мәні көбейеді (осы жағдайда 6 бірлікке). Нәтижеде барлық бос емес ұяшықтар үшін (3.1.5) қатынас орындалады. V_4 потенциалының мәні 6 бірлікке азайды, сондықтан B_4 бағанында тиімділік шартын қанағаттандырмайтын бос ұяшықтардың пайда болуы мүмкін емес. Егер мұндай ұяшықтар бар болса да, олар жойылуы

мүмкін, өйткені, осы шарт бұзылған барлық ұяшықтар үшін, алтыға тең айырма ең үлкен болып саналады. Тиімділік шартын қанағаттандырмайтын бос ұяшықтар тек қана потенциалы артқан қатарда (бағанда) пайда болуы мүмкін. U_1 потенциалы 6 бірлікке артты, сондықтан A_1 қатардың бос ұяшықтарын тиімділікке тексеру керек: $-3 < 10$; $2 < 7$; $6 > 4$; $7 > 4$. A_1B_3 және A_1B_5 ұяшықтары бұл шартты қанағаттандырмайды. Олар үшін $(U_i + V_j) - C_{ij}$ айырмалар шамаларын табамыз және оларды сәйкес ұяшықтардағы сол жақта төменгі бұрышқа жазамыз.

Анықтаймыз $\max(2; 3; 1; 1) = 3$. A_1B_5 ұяшығы жүктеуге жатады. Оны «+» таңбасымен белгілеп, 3.7-кестеде көрсетілген пунктир сызықтармен қайта үлестіру циклын орнатамыз. Циклдің төбелерін кезекпен «-» және «+» таңбаларымен белгілеп, $\theta_0 = \min(50; 50; 100) = 50$ табамыз. Цикл бойынша 50 бірлік жүкті A_1B_5 ұяшығына қайта үлестіріп, 3.8-кестеде келтірілген тірек жоспарын аламыз.

Циклдің «-» таңбасымен белгіленген екі ұяшығында $\theta_0 = 50$ мәніне қол жеткізілгені үшін, алынған тірек жоспарының A_2B_2 ұяшығында нөлдік тасымалдау қалды.

Кесте 3.8

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Жіберушілер	V_j						
	U_i						
		3	8	12	7	10	
A_1	- 6	10	7	4	1	4	100
				2	50	50	
A_2	- 1	2	7	10	6	11	250
		200	0	1	50	+	
A_3	+ 8	8	5	3	2	2	200
						200	
A_4	0	11	8	12	16	13	300
			200	100	-		
Қажеттіліктер		200	200	100	100	250	850

Байқаймыз, соңғы итерация нәтижесінде жоспар 150 бірлік құнға жақсарды. Бұл жақсару бос ұяшыққа көшірілген жүк бірлігінің санын, осы ұяшықтағы айырмалар шамасына көбейту арқылы табылады. Бос емес ұяшықтағы $(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ айырмалар шамасы, егер жүк бірлігін осы ұяшыққа қайта үлестіргенде, тасымалдау жоспарының құны қаншаға азайғанын көрсетеді.

Алынған тірек жоспарында потенциалдар жүйесін өзгертіп, оны тиімділікке тексереміз. Тиімділік шартын айырмалары екіге және бірге тең екі ұяшық қанағаттандырмайды. Сондықтан жүкті A_1B_3 ұяшығына қайта үлестіру қажет. Оны «+» таңбасымен белгілеп, 3.8-кестеде көрсетілген пунктир сызықтармен қайта үлестіру циклын құрамыз. Циклдер әр түрлі конфигурацияларда, тіпті өзі айқасатын болуы мүмкін (3.8-кесте).

Циклдің төбелерін «-» және «+» таңбаларымен белгілеп, қайта үлестіру шамасын табамыз: $\theta_0 = \min(50; 0; 100) = 0$.

Нөлдік тасымалдауды A_1B_3 ұяшығына көшіріп, жаңа тірек жоспарын аламыз және потенциалдар жүйесіне өзгерістер енгіземіз. Құрылған потенциалдар жүйесінен 3.9-кестеде келтірілген жоспар тиімді деген қорытынды шығаруға болады. Оның құны 4150 бірлікке тең.

Кесте 3.9

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
Жіберушілер	V _j	3	6	- 10	7	10	
	U _i		8	12			
A ₁	- 6!	10	7	4	1	4	100
					50	50	
A ₂	-1	2	7	10	6	11	250
		200			50		
A ₃	-8	8	5	3	2	2	200
						200	
A ₄	+ 2	11	8	12	16	13	800
	0		200	100			
Қажеттіліктер		200	200	100	100	250	850

3.4 Көлік есебінің ашық моделі

Көлік есебінде жалпы қорлар мен жалпы қажеттіліктер сәйкес келсе, яғни $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ шарты орындалса, онда жабық модель деп, ал кері жайдайда – ашық деп атайды. Ашық модель үшін екі жағдай болуы мүмкін:

а) жалпы қорлар жалпы қажеттіліктерден артық

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j ;$$

б) жалпы қажеттіліктер жалпы қорлардан артық

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j .$$

Сызықты функция екі жағдайда да бірдей, тек қана шектеулер жүйесінің түрі өзгереді.

Сызықты функцияның

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

шектеулерде

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & (j = 1, 2, \dots, n); \end{cases} \quad \{ \text{а) жағдай} \}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, & (j = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad \{ \text{б) жағдай} \}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

минималды мәнін табу қажет.

Әдетте, ашық модель жабық модельге келтіріліп шешіледі. Бірінші а) жағдайда, жалпы қорлар жалпы қажеттіліктерден артық болғанда, B_{n+1} жалған тұтынушы енгізіледі. Оның қажеттіліктері

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Ал екінші б) жағдайда, жалпы қажеттіліктер жалпы қорлардан артық болғанда, A_{m+1} жалған жіберуші енгізіледі. Оның қоры

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Жалған тұтынушыға дейінгі жүк бірлігінің тасымалдау құны да, жалған жіберушіден жүк бірлігінің тасымалдау құны да нөлге тең деп саналады, өйткені екі жағдайда да жүк тасылмайды.

Есеп түрлендіруден кейін жабық модель түріне келеді және қарапайым әдіспен шешіледі.

Жүк бірлігінің бірдей тасымалдау құндарында, жіберушіден жалған тұтынушыға қарағанда нақты тұтынушыға, жүкті тасымалдау шығыны минималды, ал жалған тұтынушыға жүк қолайлығы аздау жеткізушіден жіберіледі. Дәл осыларды жалған жіберушіге қатысты да аламыз.

Қандайда бір көлік есебін шешуден алдын, алғашында оның қандай модельге тиісті екендігін тексеріп алған жөн. Содан кейін ғана оны шешу үшін кесте құрылады.

Мысал 1. Біртекті жүктерді A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) төрт жіберушіден сәйкес 100, 400, 100 және 100 бірліктерде, B_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) бес тұтынушыға сәйкес 50, 100, 150, 200 және 250 бірліктерде, жалпы құны ең кіші болатын тасымалдау жоспарын құру қажет. Жүк бірлігін тасымалдау құны 3.10-кестеде келтірілген.

Кесте 3.10

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	6	8	12	16
A_2	16	10	8	6	15
A_3	4	1	9	11	13
A_4	3	2	7	7	15

Шешуі. Жалпы қорлар мен қажеттіліктерді есептейміз: $\sum_{i=1}^4 a_i = 700$;

$\sum_{j=1}^5 b_j = 750$. Қажеттіліктер қорлардан 50 бірлікке артық. Қорлар көлемі a_{m+1} болатын жалған A_{m+1} жіберушіні енгізу қажет. 3.10-кестеде тиімді жоспар

алынған. Минималды құн немесе қос белгілеулер әдісімен бастапқы тірек жоспарды құруда, ең кіші құнды тек қана нақты жіберушілер мен тұтынушылар арасынан таңдау, ал жалған жіберушінің қорын (жалған тұтынушы қажеттілігін) ең соңғы кезекте үлестіру қажет. Бұл тиімді жоспарға барынша жақын жоспарды алуды қамтамасыз етеді. Жоғарыда айтылғандар жалған бос емес ұяшықтарды енгізуде де қолданылады.

Кесте 3.11

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Жіберушілер	V_j U_i	3	5	10	8	17	
A_1	-2	1 50	6	8 50	12	16	100
A_2	-2	16	10	+ 8	6 200	- 15 200	400
A_3	-4	4	- 1 100	9	11	13 0 +	100
A_4	-3	3	+ 2 0	7 100 -	7	15	100
A_{m+1}	-17	0	0	0	0	0 50	50
Қажеттіліктер		50	100	150	200	250	750

Есептің тиімді жоспарын талдай отырып, келесі қорытындыны жасауға болады. B_5 тұтынушы жалған жіберушіден жүктің 50 бірліген алады, сондықтан, оның қажеттілігі мұндай бірлік санынан қанағаттанбайды. Тиімді жоспар жалғыз емес, өйткені A_2B_3 ұяшық үшін потенциалдар қосындысы тасымалдау құнына тең $U_2 + V_3 = C_{23}$ және оған 3.11-кестеде көрсетілген цикл бойынша 100 жүк бірліген көшіруге болады.

Қайта үлестіру нәтижесінде тағы да тиімді болып саналатын, жаңа тірек жоспары алынды, өйткені потенциалдар жүйесі өзгеріссіз қалды және $(U_2 + V_3) - C_{23} = 0$ болғандықтан, тасымалдау жоспарының жалпы құны өзгеріссіз қалды.

Екі тиімді жоспарлардың кез келген дөңес сызықты комбинациясы да тиімді жоспар болады, сондықтан бұл қасиетті жоспарлауды жақсылау үшін қолдануға болады, сондай-ақ, есептің математикалық моделінде ескерілмеген ерекшеліктерді де есепке алуға болады (бұрын қабылданған келісім міндеттемелері, қарым-қатынаста құрылатын дәстүрлер және т.б.).

4 Жеке жұмысқа тапсырмалар

1. Екі айнымалысы бар сызықты программалау есебін графикалық әдіспен шешу (1-тапсырма).
2. n айнымалысы бар есептерді графикалық әдіспен шешу (2-тапсырма).
3. Сызықты программалау есебін симплекс әдісімен шешу (3-тапсырма).
4. Сызықты программалау есебін жасанды базис әдісімен шешу (2-тапсырма).
5. Көлік есебін солтүстік-батыс бұрышы, минималды құн, қос белгілеулер және потенциалдар әдістерімен шешу (4-тапсырма).

№1 Тапсырма нұсқалары

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 1. \quad &\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 3x_2 \leq -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(X) &= 5x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 16. \quad &\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(X) &= 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ 2. \quad &\begin{cases} -4x_1 - x_2 \leq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(X) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ 17. \quad &\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 4x_1 - x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 3. \quad &\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 3, \\ -5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(X) &= 5x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 18. \quad &\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 4x_1 - x_2 \leq 20, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} Z(X) = -3x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} Z(X) = 15x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \end{cases} \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \leq -2, \\ 4x_1 - x_2 \leq 16, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 \leq 3, \end{cases} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 4, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} Z(X) = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \end{cases} \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 3, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + x_2 \leq 15, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} Z(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \end{cases} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 6, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} Z(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} Z(X) = x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} Z(X) = -5x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 3, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 - x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \end{cases} \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 6, \end{cases} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} Z(X) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq -12, \\ x_1 + 3x_2 \geq 18, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 0, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

№2 Тапсырма нұсқалары

$$1. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ -7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 21, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -12, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} Z(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} Z(X) = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

- $Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max,$
4. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -6x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = 11x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$
5. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 11x_1 - 11x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 18x_4 \rightarrow \min,$
6. $\begin{cases} 2x_1 + 13x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 16, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -8, \\ 4x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = 12x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \min,$
7. $\begin{cases} -6x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 11x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = x_1 - 19x_2 - 5x_3 - 7x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \rightarrow \max,$
8. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ -6x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max,$
9. $\begin{cases} -10x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$
- $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \min,$ $Z(X) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$
10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 &Z(X) = -22x_1 + 19x_2 - 5x_3 - 6x_4 \rightarrow \max, & Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max, \\
 11. \begin{cases} 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 - x_4 = -1, \\ -4x_1 + 18x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} & 26. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, & Z(X) = 7x_1 - 10x_3 + 6x_4 \rightarrow \min, \\
 12. \begin{cases} 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} & 27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &Z(X) = -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, & Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\
 13. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} & 28. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. & \\
 &Z(X) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 \rightarrow \min, & Z(X) = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \min, \\
 \begin{cases} -x_1 - 8x_2 + x_3 + 6x_4 = -2, \\ 3x_1 + 27x_2 - 4x_3 - 22x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} & 29. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. & \\
 &Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, & Z(X) = 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8x_4 \rightarrow \max, \\
 \begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} & 30. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

№3 Тапсырма нұсқалары

$$\begin{aligned}
 &Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, & Z(X) = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \min, \\
 1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} & 16. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$2. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \max,$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$17. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$18. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -8, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min,$$

$$19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$20. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z(X) = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$21. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\
7. \quad & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max, \\
22. \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max, \\
8. \quad & \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
23. \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\
9. \quad & \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\
24. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \geq -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max, \\
10. \quad & \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 13, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow \min, \\
25. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\
11. \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 11, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -23, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\
26. \quad & \begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$12. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -8, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 16, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} Z(X) = x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} Z(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -6, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 4, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} Z(X) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 - x_3 \geq -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

№4 Тапсырма нұсқалары

Нұс қал ап	Есептер						Нұс қал ап	Есептер					
	$\begin{smallmatrix} \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} \end{smallmatrix}$	10	10	25	25	30		$\begin{smallmatrix} \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} \end{smallmatrix}$	50	50	100	100	50
1	10	1	5	7	9	3	16	50	3	4	6	5	13
	20	4	6	4	7	13		50	6	3	7	6	10
	10	1	5	3	4	9		100	10	5	2	2	6
	30	2	4	2	10	3		150	9	4	4	9	5
	10	3	2	5	6	4		100	3	2	4	2	3
2	$\begin{smallmatrix} \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} \end{smallmatrix}$	100	200	200	300	200	17	$\begin{smallmatrix} \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} \end{smallmatrix}$	200	200	400	200	100
	100	4	3	5	2	3		200	5	2	1	6	4
	200	7	1	2	3	1		300	6	2	4	4	6

	300	9	2	4	5	6		200	9	2	3	7	5
	100	1	3	6	4	10		100	3	2	4	2	3
3	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	5	10	15	15	15	18	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	400	600	500	400	500
	200	1	7	12	2	5		50	3	4	5	4	1
	100	2	3	8	4	7		100	1	2	7	1	5
	200	3	5	4	6	9		150	4	6	6	3	7
	400	4	4	3	8	2		100	2	7	4	7	2
	400	5	3	7	10	1		200	3	8	9	4	5
4	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	5	10	15	15	15	19	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	400	600	500	400	500
	10	2	5	5	6	7		400	1	2	3	1	2
	5	4	3	4	4	3		500	3	4	2	4	5
	5	5	2	3	6	3		600	5	7	6	3	9
	10	3	6	5	7	8		400	4	10	15	4	8
	15	1	9	7	6	4		200	3	4	5	3	7
5	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	10	30	30	30	40	20	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	100	150	150	100	100
	10	3	1	3	4	3		50	3	4	5	4	6
	30	5	1	2	2	6		100	1	5	7	1	5
	60	2	3	4	1	1		150	4	6	6	3	4
	10	6	2	5	3	2		100	2	7	4	7	2
	60	3	7	4	4	1		100	1	9	6	3	2
6	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	20	20	40	40	40	21	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	500	250	500	750	500
	20	4	5	2	4	3		250	3	1	8	1	4
	40	3	1	3	5	2		500	2	5	2	3	5
	80	2	7	6	8	6		750	9	4	6	5	7
	40	3	3	1	4	9		250	7	3	10	3	2
	20	1	6	9	2	7		500	6	6	4	7	8
7	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	100	200	200	300	400	22	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	300	900	600	900	300
	100	1	3	4	1	3		300	1	3	4	5	1
	200	5	4	5	7	5		600	9	5	2	4	8
	400	4	9	5	10	9		900	3	4	5	4	3
	200	7	7	5	8	13		600	5	7	2	6	6
	100	12	10	8	11	6		300	1	4	3	7	8
8	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	200	200	300	300	100	23	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	200	300	200	300	100
	300	4	6	3	4	1		100	2	3	4	5	1
	200	7	3	5	2	2		200	2	4	2	6	7
	100	5	3	2	4	4		300	6	5	4	5	4
	100	2	3	4	6	5		400	4	6	7	6	9
	200	1	4	4	3	3		400	5	7	6	9	8
9	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	200	400	400	300	500	24	$\begin{matrix} \text{b}_j \\ \text{a}_i \end{matrix}$	50	150	200	150	100
	200	1	6	9	3	4		50	4	5	6	10	9
	400	3	2	2	4	5		100	6	3	8	4	3
	600	4	5	4	7	6		150	5	1	3	1	7
	200	1	4	3	9	8		150	7	2	4	2	3

	200	7	9	1	1	8		100	1	5	7	8	4
10	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	150	200	200	400	200	25	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	200	300	200	200	100
	150	1	4	7	2	4		200	1	5	1	1	5
	300	3	6	3	9	6		300	4	2	6	7	9
	250	4	8	12	2	5		100	3	4	5	6	5
	150	1	5	9	13	7		300	4	2	3	3	6
	200	2	3	4	6	5		300	6	2	3	5	4
11	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	40	60	40	60	20	26	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	100	200	200	100	200
	20	3	3	4	2	3		100	2	3	4	2	5
	40	1	2	1	5	3		200	3	1	1	2	1
	60	4	8	2	9	12		300	4	3	3	5	4
	40	5	7	9	6	5		200	5	1	2	6	7
	20	10	14	17	7	6		100	2	9	8	7	6
12	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	300	200	300	100	400	27	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	200	200	400	100	100
	300	3	4	3	1	5		200	2	2	3	1	2
	200	2	3	5	6	8		100	1	2	3	4	5
	100	1	2	3	3	4		200	4	3	6	5	8
	200	4	5	7	9	9		100	1	2	3	7	5
	300	5	6	8	4	7		200	4	3	5	7	6
13	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	20	20	40	10	30	28	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	50	100	100	200	200
	20	1	1	3	4	5		50	1	4	5	6	1
	10	2	3	4	2	6		100	2	2	2	5	5
	20	1	1	4	7	8		150	3	6	8	3	4
	30	5	6	3	4	7		200	4	7	9	4	8
	10	4	5	7	6	4		100	5	2	2	7	9
14	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	200	300	400	200	300	29	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	100	100	200	200	300
	200	1	3	4	2	5		300	1	2	3	4	8
	200	1	2	4	1	7		200	4	5	6	2	6
	300	3	4	5	9	9		100	1	1	3	4	5
	300	6	3	7	6	8		200	3	3	2	2	7
	100	5	6	7	3	4		300	5	6	7	8	10
15	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	300	150	300	150	250	30	$\begin{matrix} & \mathbf{b_j} \\ \mathbf{a_i} & \end{matrix}$	100	300	300	300	600
	150	2	1	3	1	5		300	4	2	2	5	3
	250	8	3	7	4	6		600	3	3	4	5	5
	250	6	4	9	3	4		100	1	2	3	4	6
	150	5	2	4	2	3		300	2	6	1	1	8
	150	4	6	2	3	4		600	3	4	5	5	9

Әдебиеттер

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 300с.
2. Бакаев А.А. и др. Математические методы в планировании и экономических расчетах. – Киев, 1968.
3. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Учебник. – М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, изд. «ДИС», - 1997. – 368с.
4. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В.В.Федосеев, А.Н.Гармаш и др.; Под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391с.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. – М.: Дело. 2001. – 688с.
6. Калихман И.А. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Наука, 1975.
7. Джамилев Н.И., Эйдельмант М.И. Сборник задач по математическому программированию: Учеб. пособие. – Ташкент: Укитувчи, 1989. – 224с.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА – М., 2002. – 575с.
9. Куракбаев Д.С., Куракбаева С.Д. Основы линейного программирования. -Шымкент: ЮКГУ,-2005.-98с.
- 10.Куракбаев Д.С., Ибрагимов О.М., Куракбаева С.Д. Основы линейного программирования. Свидетельство о гос.регистрации объекта в Комитете по правам МЮ интеллект. собст.РК,№1569 от 15.10.2010.

Құрақбаев Жұмағали Салбекұлы
Ибрагимов Оспанәлі Мусақұлұлы
Махатова Анар Хантөреқызы

ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

Басуға _____ қол қойылды
Пішімі X^xY 1/16
Типографиялық қағаз. Офсеттік баспа. Көлемі __ б.т.
Таралымы _____ дана. Тапсырыс _____

© М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университетінің баспаханасында
шығарылған